

METRON

RIVISTA INTERNAZIONALE DI STATISTICA — REVUE INTERNATIONALE DE STATISTIQUE
INTERNATIONAL REVIEW OF STATISTICS — INTERNATIONALE STATISTISCHE ZEITSCHRIFT

DIRETTORE PROPRIETARIO — DIRECTEUR ET PROPRIÉTAIRE
EDITOR AND PROPRIETOR — HERAUSGEBER UND EIGENTHÜMER

Prof. Dott. Corrado Gini, *Direttore dell'Istituto di Statistica della R. Università di Roma.*

COMITATO DIRETTIVO — COMITÉ DE DIRECTION
EDITORIAL COMMITTEE — DIREKTION-KOMITEE

Prof. A. Andréadès, *prof. de Science des finances à l'Université d'Athènes (Grèce).*

Prof. F. Bernstein, *früherer Direktor des Instituts für mathematische Statistik der Universität, Göttingen (Deutschland), jetzt an der Columbia University (U. S. A.).*

Prof. A. E. Bunge, *director gen. de Estadística de la Nación, Buenos Aires (Argentina).*

Prof. F. P. Cantelli, *professore di Matematica Attuariale nel R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Roma (Italia).*

Prof. C. V. L. Charlier, *professor der Astronomie an der Universität Lund (Schweden).*

Prof. A. Flores de Lemus, *jefe de Estadística del Min. de Hacienda, Madrid (España).*

Prof. M. Greenwood, *professor of Epidemiology and Vital Statistics in the University of London (England).*

Dott. G. Jahn, *directeur du Bureau Central de Statistique de Norvège, Oslo (Norvège).*

Prof. A. Julin, *secrétaire général honoraire du Ministère de l'Industrie, du Travail et de la Prévoyance sociale, Bruxelles (Belgique).*

Prof. H. W. Methorst, *directeur de l'Office permanent de l'Institut International de Statistique et du Bureau central de Statistique, La Haye (Pays-Bas).*

Prof. W. F. Ogburn, *professor of Sociology in the University of Chicago (U. S. A.).*

Prof. R. Pearl, *director of the Department of Biology of the School of Hygiene and Public Health, Baltimore (U. S. A.).*

Prof. H. Westergaard, *professor in the University of Copenhagen (Denmark).*

AMMINISTRATORE — ADMINISTRATEUR — MANAGER — VERWALTER
Dott. Silvio Orlandi, *Istituto di Statistica della R. Università di Roma.*

SEGRETARI DI REDAZIONE — SECRÉTAIRES DE RÉDACTION
EDITORIAL, SECRETARIES — REDACTIONSSECRETAERE

Prof. Luigi Galvani — Prof. Mario Saibante

Vol. XI - N. 4

15-V-1934.

SOMMARIO — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

| | |
|--|--------|
| Hermann von Schelling. <i>Die Konzentration einer Verteilung und ihre Abhängigkeit von den Grenzen des Variationsbereiches</i> | Pag. 3 |
| V. Castellano. <i>Sullo scarto quadratico medio della probabilità di transvariazione</i> | » 19 |
| Carlos E. Dieulefait. <i>Sur les développements des fonctions des fréquences en séries de fonctions orthogonales</i> | » 77 |
| T. Salvemini. <i>Ricerca sperimentale sull'interpolazione grafica di istogrammi</i> | » 83 |
| Bibliografia | » 199 |

ROMA

AMMINISTRAZIONE DEL «METRON»
R. UNIVERSITÀ — ISTITUTO DI STATISTICA

ARTICOLI GIUNTI ALLA RIVISTA CHE
VERRANNO PUBBLICATI NEI PROSSIMI
NUMERI.

(Secondo l'ordine d'arrivo).

ARTICLES REÇUS PAR LA REVUE ET
À PARAÎTRE PROCHAINEMENT.

(D'après la date de reception).

ARTIKEL, DIE AN DIE ZEITSCHRIFT
ANGEKOMMEN SIND UND WELCHE IN
DEN NACHFOLGENDEN NUMMERN ER-
SCHEINEN WERDEN.

(Nach der Reihenfolge des Eingangs)

ARTICLES RECEIVED BY THE REVIEW
WHICH WILL BE PUBLISHED IN FUTU-
RE ISSUES.

(According to date of receipt)

N. Smirnoff. Ueber die Verteilung des allgemeinen Gliedes in der
Variationsreihe.

P. R. Rider. The third and fourth Moments of the generalized Lexis
Theory.

J. O. Irwin. Tests of Significance for differences between percentages
based on small numbers.

L. Hersch. Essai sur les variations périodiques et leur mensuration.

H. Koeppler. Das Fehlergesetz des Korrelationskoeffizienten und
andere Wahrscheinlichkeitsgesetze der Korrelationstheorie.

S. Koller. Die Analyse der Abhängigkeitsverhältnisse in zwei Kor-
relationssystemen.

C. E. Dieulefait. Généralisation des courbes de K. Pearson.

D. Sheldon, Jr. Problems in the Statistical Study of juvenile Delinquency.

Gli Autori degli articoli inviati
per la pubblicazione nella Rivista,
rinunciano in favore della medesima
alla proprietà letteraria degli articoli
stessi, qualora vengano pubblicati.

Les Auteurs des articles envoyés à
la Revue, pour y être publiés, renon-
cent, en faveur de celle-ci, à la pro-
priété littéraire de leurs articles, s'ils
sont acceptés.

The Authors of papers sent for
publication in the Review are sup-
posed to give up their copyright in
favour of the Review if the papers
are published.

Die Verfasser der zur Veröffentli-
chung in der Zeitschrift zugesandten
Aufsätze, werden, falls selbige veröf-
fentlicht werden, auf ihre Verfasser-
rechte zu Gunsten der Zeitschrift
verzichten müssen.

HERMANN VON SCHELLING

Die Konzentration einer Verteilung und ihre Abhängigkeit von den Grenzen des Variationsbereiches

Es ist ein häufiger Einwand gegenüber den neuerdings üblichen Charakterisierungen einer PARETO'schen Verteilung durch das Konzentrationsmass, dass dieses von der Unsicherheit der Angaben an der unteren Grenze beeinflusst werden müsse. Im Folgenden werden wir die Berechtigung dieses Argumentes untersuchen. Hierzu werden wir zunächst für eine beliebige Verteilung eine neue Funktion einführen und zeigen, dass sie für die PARETO'sche Verteilung konstant ist. Im Anschluss daran werden wir einige neue Eigenschaften für die PARETO-Verteilung und solche Verteilungen nachweisen, die durch Addition mehrerer PARETO'schen Verteilungen entstanden sind. Im zweiten Teil der Arbeit werden wir das Konzentrationsmass partiell differenzieren, um die Abhängigkeit von den Grenzen des Variationsbereiches festzustellen. Bei der partiellen Differentiation nach der unteren Grenze stossen wir auf diejenige Funktion, die im ersten Teil untersucht worden ist (*).

(*) Die Arbeiten über das Konzentrationsmass sind so zahlreich, dass hier nur auf die wichtigsten aufmerksam gemacht werden kann. Als erster hat CORRADO GINI das Konzentrationsmass eingeführt in seiner Arbeit; *Il diverso accrescimento delle classi sociali e la concentrazione della ricchezza*, «Giornale degli Economisti», 1909; *Indici di concentrazione e di dipendenza*, «Biblioteca Italiana dell'Economista», 1910; *Variabilità e Mutabilità*, Bologna 1912; *Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri*, «Atti del R. Istit. Ven. di Sc., Lett. ed Arti», 1913-14. — Von neueren Untersuchungen sei verwiesen auf: E. J. GUMBEL: *Das Konzentrationsmass*. «Allg. Statistisches Archiv», Jena 1928. — L. VON BORTKIEWICZ: *Die Disparitätsmasse der Einkommensstatistik*. «XIX^e Session de l'Institut International de Statistique», Tokio, 1930; La Haye 1930. Man vergleiche dazu die Ausführungen von C. GINI, F. SAVORGAN, G. PIETRA. Schliesslich C. GINI: *Intorno alle curve di concentrazione*. «Metron», vol. IX, n. 3-4, 1932. Mit rein geometrischen Mitteln

Die verschiedenen, in die Untersuchung eingestreuten Beispiele werden wir zum Schluss durch die Analyse der Einkommensverteilung der natürlichen Personen im Deutschen Reiche nach der Steuerstatistik 1926 ergänzen.

Wenn die unabhängige Veränderliche x einer Verteilung $\varphi(x)$ nur positive Werte annehmen kann und das nullte und erste Moment bei einer Ausdehnung des Variationsbereiches bis $+\infty$ endliche bleibt, so können wir stets den Durchschnitt \bar{x} derjenigen Werte der Veränderlichen bilden, die grösser als x sind. Wir schreiben

$$(I) \quad \bar{x} : x = 1 + f(x).$$

Die Funktion $f(x)$ charakterisiert die Konzentration der Ausgangsverteilung, allerdings nicht nur durch eine einzige Zahl, wie das Konzentrationsmass ζ . Bemerkenswert ist es, dass die Verteilung $\varphi(x)$ im allgemeinen Falle explizit als Funktion von $f(x)$ dargestellt werden kann. Das soll zunächst gezeigt werden. Wir setzen

$$A = \int_x^{\infty} x \varphi(x) dx; \quad B = \int_x^{\infty} \varphi(x) dx \quad F = A - Bx.$$

Durch Differentiation x erhalten wir:

$$F' = -x \varphi(x) + x \varphi(x) - B = -B \quad \text{und}$$

$$F'' = \varphi(x).$$

Durch Auflösen ergibt sich:

$$A = F - F'x \quad \text{und} \quad B = -F'.$$

$$\text{Nun ist} \quad \bar{x} : x = 1 + f(x) = A : Bx = 1 - F : F'x.$$

$$\text{Also} \quad F' : F = -1 : x f(x).$$

Die Integration ist sofort möglich und liefert:

$$F = C \cdot e^{-\int \frac{dx}{x f(x)}}.$$

wird hier das von uns aufgeworfene Problem bereits behandelt; die von uns im Folgenden benutzte analytische Methode vermag der Fragestellung neue Seiten abzugewinnen. Als letzte Arbeit sei genannt: L. GALVANI: *Sulle curve di concentrazione relative a caratteri non limitati e limitati*. «Metron», vol. X, n. 3, 1932.

Zweimalige Differentiation ergibt :

$$(2) \quad \varphi(x) = C \frac{1 + f(x) + x f'(x)}{(x f(x))^2} e^{-\int \frac{dx}{x f(x)}}.$$

Selbstverständlich muss $\varphi(x)$ der Bedingung ≥ 0 genügen, wenn $\varphi(x)$ als Verteilung angesprochen werden soll. Wir wollen einige einfache Anwendungen machen.

I). $f(x) = \text{Const.} = 1 : (n - 1)$ Es wird

$$e^{-\int \frac{dx}{x f(x)}} = e^{-(n-1) \int \frac{dx}{x}} = e^{1/n} \frac{1}{x^{n-1}} = \frac{1}{x^{n-1}} \quad \text{also}$$

$$\varphi(x) = C \frac{1 + \frac{1}{n-1}}{\frac{1}{(n-1)^2} x^{n+1}} = \frac{C'}{x^{n+1}}$$

Das Ergebnis ist, wie zu erwarten war, die spezielle PARETO Verteilung. Für sie allein ist also $\bar{x} : x$ eine Konstante, die die Konzentration angibt. Gehorchte z. B. die Einkommensverteilung einer Bevölkerung dieser Regel, so könnte man dies als normal ansehen. In Wirklichkeit wird sie nicht in voller Reinheit angetroffen; man muss sich daher die Frage vorlegen, worin der Grund der Abweichung zu suchen sei. Am naheliegendsten ist die Vermutung, dass das PARETO'sche Gesetz für einzelne Bevölkerungsschichten streng erfüllt ist, die Konstante n aber nicht für alle Schichten genau den gleichen Wert hat. Für diesen Fall ist $\bar{x} : x$ keine Konstante mehr, sondern steigt mit wachsendem x monoton von $n_1 : (n_1 - 1)$ bis $n_p : (n_p - 1)$, wenn n_1 die grösste n_p die kleinste der PARETO'schen Konstante ist. Den Beweis dieser Tatsache erbringt man wie folgt :

mit $\varphi(x) = \sum_{i=1}^p \frac{c_i}{x^{n_i+1}}$ ergibt sich $x \cdot \int_x^\infty \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^h \frac{c_i}{n_i x^{n_i-1}}$

und $\int_x^\infty x \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^p \frac{c_i}{(n_i - 1) x^{n_i-1}}$

$$\begin{aligned} \text{Daher wird } \frac{\bar{x}}{x} &= \frac{\sum_{i=1}^p \frac{c_i}{(n_i - 1) x^{n_i - 1}}}{\sum_{i=1}^p \frac{c_i}{n_i x^{n_i - 1}}} = \frac{\sum_{i=1}^p c_i \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_i (n_i - 1)} \right) \cdot \frac{1}{x^{n_i - 1}}}{\sum_{i=1}^p \frac{c_i}{n_i x^{n_i - 1}}} = \\ &= 1 + \frac{\sum_{i=1}^p \frac{c_i}{n_i (n_i - 1) x^{n_i - 1}}}{\sum_{i=1}^p \frac{c_i}{n_i x^{n_i - 1}}}. \end{aligned}$$

Wenn wir diesen Ausdruck nach der Quotientenregel ableiten, heben sich im Zähler die Glieder mit c_i^2 weg. Fassen wir die vier Glieder mit $c_i c_k$ zusammen, so erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{x}}{x} \right) = \sum_{i > k} \frac{c_i c_k (n_i - n_k)^2}{n_i (n_i - 1) \cdot n_k (n_k - 1) x^{n_i + n_k - 1}} : \left(\sum_{i=1}^p \frac{c_i}{n_i x^{n_i - 1}} \right)^2 > 0.$$

Damit ist das monotone Steigen bewiesen. Die angegebenen Werte von $\lim_{x \rightarrow 0} (\bar{x} : x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\bar{x} : x)$ folgen unmittelbar aus dem Ausdruck

für $\bar{x} : x$.

II). Als eine weitere Anwendung zu Formel (2) wollen wir $f(x) = 1 : (n - 1) \cdot x^k$ wählen. Wir beschränken dabei k auf das Intervall $0 < k < 1$. Für $k = 0$ kommen wir auf unser erstes Beispiel zurück. Wir erhalten:

$$-\int \frac{dx}{x f(x)} = -(n - 1) \int x^{+(k-1)} dx = -\frac{n-1}{k} x^k;$$

$$f(x) + x f'(x) = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^k} (1 - k).$$

$$\text{Also } \varphi(x) = C \cdot \frac{1 + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^k} (1 - k)}{\frac{1}{(n-1)^2} x^2 (1 - k)} \cdot e^{-\frac{n-1}{k} x^k}$$

und

$$\frac{\bar{x}}{x} = 1 + \frac{1}{(n-1) x^k}$$

Für $k = 1$ ergibt sich die Exponentialfunktion $\varphi(x) = C' e^{-(n-1)x}$. Das Bezeichnende an diesem Beispiel ist, dass im Gegensatz zu früher die Grösse $\bar{x} : x$ mit wachsendem x monoton abnimmt.

Bisher ist angenommen worden, dass die Verteilungsfunktion stetig und differenzierbar sei. Auch für den Fall, dass die unabhängige Veränderliche x nur die in beliebigen Abständen aufeinander folgenden Werte x_1, x_2, x_3, \dots annehmen kann, ist es möglich, aus

$$\bar{x} : x_i = 1 + f(x_i)$$

auf die Verteilung $\varphi(x_i)$ zu schliessen. Wir setzen:

$$s_i = \sum_{k=i}^{\infty} \varphi_k \quad ; \quad S_i = \sum_{k=i}^{\infty} x_k \varphi_k \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

s_i und S_i sind empirisch gegebene Konstanten. Die Aufgabe lautet, die Verteilung auf die diskreten Werte x_1, x_2, x_3, \dots so vorzunehmen, dass

$$\bar{x} : x_i = S_i : (x_i s_i) = 1 + f(x_i) \quad \text{wird. Es ist}$$

$$\frac{\bar{x}}{x_{i+1}} = \frac{S_{i+1}}{x_{i+1} s_{i+1}} = 1 + f(x_{i+1}) = \frac{S_i - x_i \varphi_i}{x_{i+1} (s_i - \varphi_i)} \quad \text{oder}$$

$$x_{i+1} s_i (1 + f(x_{i+1})) - S_i = \varphi_i [x_{i+1} (1 + f(x_{i+1})) - x_i]$$

Ersetzen wir S_i durch $x_i s_i (1 + f(x_i))$, so erhalten wir:

$$(3) \quad \varphi_i = s_i \frac{x_{i+1} (1 + f(x_{i+1})) - x_i (1 + f(x_i))}{x_{i+1} (1 + f(x_{i+1})) - x_i} ; \quad s_i = s_{i-1} - \varphi_{i-1}.$$

Durch diese Rekursionsformel können wir nacheinander $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ bestimmen.

Zu Anwendungen übergehend, wollen wir uns auf den einfachsten Fall beschränken, dass $f(x_i)$ konstant ist. Wir erhalten dann das arithmetische Gegenstück zur PARETO-Verteilung. Während aber diese mit wachsendem x ständig fällt, kann man die x_1, x_2, x_3, \dots so wählen, dass im arithmetischen Falle die fallende Tendenz durch gelegentliche Anstiege unterbrochen wird. Diese, zunächst erstaunliche Tatsache soll an folgendem Zahlenbeispiel gezeigt werden.

$$f(x_i) = 1 ; s_1 = 100 ; S_1 = 200 ; x_i : 1, 2, 7, 8, 13, 14, 19, 20, \\ 25, 26, 31, 32 \dots$$

| | | | | | | | | | | |
|-------------|-------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| s_i | 100.0 | 33.3 | 5.5 | 4.3 | 2.0 | 1.7 | 1.0 | 0.9 | 0.6 | 0.6 |
| φ_i | 66.7 | 27.8 | 1.2 | 2.3 | 0.3 | 0.7 | 0.1 | 0.3 | 0.0 | 0.2 |

Wollte man die Erschöpfung des Wertevorrates S_i genauer prüfen, so hätte man mehr Dezimalstellen mitnehmen müssen. Mit obigen rohen Werten erhält man $\sum_{i=1}^{10} x_i \varphi_i = 175.9$. Zu $7/8$ ist also S_i durch die ersten 10 Funktionen bereits erschöpft.

Unsere bisherigen Betrachtungen können wir dahin zusammenfassen, dass es stets mit Hilfe einer einzigen Quadratur oder durch ein immer ausführbares Rekursionsverfahren möglich ist, bei Kenntnis des Verlaufes von $\bar{x} : x = 1 + f(x)$ die Verteilung $\varphi(x)$ selbst zu berechnen. In Einzelfällen ist das natürlich schon längst ausgeführt worden. Trotzdem erscheint es wünschenswert, auf die allgemeine Verwendbarkeit der Methode hinzuweisen. Die Verteilung $\varphi(x)$ ist von gelegentlichen, nicht typischen Ereignissen und unvermeidbaren Fehlern bei der statistischen Erhebung in weit höherem Grade abhängig, als die gemittelte Funktion $f(x)$. Man wird den typischen Verlauf von $f(x)$ viel eher erfassen können, als den von $\varphi(x)$. Ist aber $f(x)$ bekannt, so ist die 'wahre' Verteilung $\varphi(x)$ eindeutig berechenbar! Ein Beispiel aus der Bevölkerungsstatistik möge dies erläutern. Als Verteilung wählen wir die negative Abteilung der Kurve der Ueberlebenden $l(x)$. Dann bedeutet $\bar{x} : x$ das durchschnittliche von den über x -jährigen beim Tode erreichte Alter, dividiert durch x . Es ist nämlich

$$\frac{\bar{x}}{x} = \frac{-\int_x^{\infty} z l'(z) dz}{x \left(-\int_x^{\infty} l'(z) dz \right)} = \frac{x l(x) + \int_x^{\infty} l(z) dz}{x l(x)} = 1 + \frac{E(x)}{x}$$

Also $\bar{x} : x = 1 + f(x) = 1 + E(x) : x$ oder $f(x) = E(x) : x$.

$E(x)$ bedeutet dabei die Lebenserwartung. Nun ist ja eine Beziehung zwischen der Lebenserwartung und der Kurve der Ueberlebenden keineswegs etwas Neues. Die Bevölkerungsstatistik gehört aber zu den am meisten bearbeiteten Zweigen unserer Disziplin. Das Beispiel soll nur zeigen, wie durch die Formel (2) bzw. (3) ganz schematisch wichtige Beziehungen zu gewinnen sind.

Es ist eine gewisse Willkür, wenn wir, um die Konzentration eines bei x beginnenden Abschnittes zu kennzeichnen, gerade den arithme-

tischen Durchschnitt der Werte der Veränderlichen über x heranzuziehen. Von dieser Willkür ist die Definition des Konzentrationsmasses ζ frei. Die Veränderliche x variere im Bereich $c_1 \leq x \leq c_2$. Wir betrachten die Funktionen

$$u(x) = \frac{\int_{c_1}^x z \varphi(z) dz}{\int_{c_1}^{c_2} z \varphi(z) dz} \quad \text{und} \quad v(x) = \frac{\int_{c_1}^x \varphi(z) dz}{\int_{c_1}^{c_2} \varphi(z) dz}$$

Aus denselben denken wir uns x eliminiert. Es ergibt sich dann die Konzentrationsgleichung

$$v = f(u)$$

Die Kurve läuft von (0,0) nach (1,1) stets nach unten konkav und daher ganz oberhalb der Geraden $u = v$. Wir setzen:

$$I = \int_0^1 v du = \frac{\int_0^1 x v dx}{\bar{x}} = \frac{c_2 - \int_{c_1}^{c_2} v^2 dx}{2\bar{x}}$$

und führen nach Gumbel *)

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{I - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2I - 1 = \frac{c_2 - \bar{x} - \int_{c_1}^{c_2} v^2 dx}{\bar{x}} = \frac{\int_{c_1}^{c_2} v(1-v) dx}{c_1 + \int_{c_1}^{c_2} (1-v) dx} = \\ &= \frac{\int_{c_1}^{c_2} v(1-v) dx}{c_2 - \int_{c_1}^{c_2} v dx}. \end{aligned}$$

als Konzentrationsmass ein. ζ schwankt zwischen 0 und 1. Der erste Wert tritt nur für $u = v$ ein ("kommunistische Verteilung"), der zweite im Falle der unendlichen Konzentration ("ein einziger besitzt alles").

(*) GUMBEL, E. J. *Ein Mass d. Konzentration b. pekuniären Verteilungen.* "Archiv f. Sozialwiss. u. Sozialpolitik" 58, 113. Derselbe, *Das Konzentrationsmass*, "Allg. Statist. Archiv" 18, 279 (1928). Dort sind die Ableitungen der im Text gebrachten Formeln nachzulesen.

In u und v treten die Grenzen c_1 und c_2 des Variationsbereiches auf. Sie gehen infolgedessen auch in ζ ein. Man kann also nicht schlecht-hin sagen, etwa die Einkommensverteilung im Deutschen Reiche weise eine bestimmte Konzentration ζ auf, sondern man muss hinzufügen, welche Einkommensgrenzen beiderseits der Berechnung zugrunde lagen. Vom statistischen, nicht steuerlichen Standpunkt, interessiert die Konzentration der gesamten Einkommensverteilung einschliesslich der kleinsten Einkommen. Die Erhebungen werden aber zu Steuerzwecken gemacht und beginnen daher bei einem gewissen Mindesteinkommen, das zudem noch je nach dem Familienstand verschieden ist. Es entsteht die Frage, ob man aus einem solchen unvollständigen Material Schlüsse auf die gesuchte Konzentration ziehen kann. Dazu muss man näher untersuchen, wie die Grösse ζ von den Grenzen c_1 und c_2 abhängt, d. h., man muss die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \zeta}{\partial c_1}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial c_2}$ bilden. Wir gehen dabei von einem Ausdruck für ζ aus, der sich schon in den genannten Arbeiten von Gumbel findet. Nur dürfen wir von der dort gemachten Vereinfachung $\int_{c_1}^{c_2} \varphi(z) dz = 1$ hier keinen Gebrauch machen, weil bei Verschiebung der Grenzen c_1 und c_2 durch die Differentiation die Normierung aufgehoben wird. Dann ist dagegen die Annahme erlaubt, dass die Verteilungsfunktion $\varphi(x)$ von c_1 und c_2 unabhängig ist, was im Falle der Normierung natürlich nicht zulässig wäre. Durch diese Unabhängigkeit wird die Differentiation wesentlich erleichtert. Um die Rechnung, die leicht etwas unübersichtlich werden könnte zu vereinfachen, führen wir mehrere Hilfsfunktionen ein, die wir zunächst gesondert ableiten.

$$(4) \quad I = \int_{c_1}^{c_2} \left\{ \int_{c_1}^x \varphi(z) dz \cdot \int_x^{c_2} \varphi(z) dz \right\} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I}{\partial c_1} = -\varphi(c_1) L \\ \frac{\partial I}{\partial c_2} = \varphi(c_2) M \end{array} \right.$$

$$K = \int_{c_1}^{c_2} \varphi(z) dz \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial K}{\partial c_1} = -\varphi(c_1) \\ \frac{\partial K}{\partial c_2} = \varphi(c_2) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 L &= \int_{c_1}^{c_2} \left\{ \int_{c_1}^{c_2} \varphi(z) dz \right\} dx & \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial c_1} = -K \\ \frac{\partial L}{\partial c_2} = (c_2 - c_1) \varphi(c_2) \end{cases} \\
 M &= \int_{c_1}^{c_2} \left\{ \int_{c_1}^x \varphi(z) dz \right\} dx & \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial c_1} = -(c_2 - c_1) \varphi(c_1) \\ \frac{\partial M}{\partial c_2} = K. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Mit diesen Ausdrücken lässt sich das Konzentrationsmass folgendermassen darstellen:

$$(5) \quad \zeta = \frac{I}{K(c_1 K + L)} = \frac{I}{K(c_2 K - M)}.$$

Die erste Form benutzen wir bei der Differentiation nach c_1 , die zweite beim Ableiten nach c_2 . Wir bilden zunächst

$$\begin{aligned}
 d\zeta &= \frac{dI}{K(c_1 K + L)} - \frac{\zeta}{K(c_1 K + L)} [dK(c_1 K + L) + \\
 &\quad + K(K dc_1 + c_1 dK + dL)] \\
 &= \frac{dI}{K(c_2 K - M)} - \frac{\zeta}{K(c_2 K - M)} [dK(c_2 K - M) + \\
 &\quad + K(K dc_2 + c_2 dK - dM)]
 \end{aligned}$$

und setzen dann die Ausdrücke (4) ein. Es ergeben sich dann die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial c_1} &= \frac{\varphi(c_1)}{K(c_1 K + L)} [-L + \zeta(2c_1 K + L)] = \\
 &= \frac{\varphi(c_1)}{K} \left\{ \left(\frac{c_1}{x} - 1 \right) + \zeta \left(\frac{c_1}{x} + 1 \right) \right\} \\
 \frac{\partial \zeta}{\partial c_2} &= \frac{\varphi(c_2)}{K(c_2 K - M)} [M - \zeta(2c_2 K - M)] = \\
 &= \frac{\varphi(c_2)}{K} \left\{ \left(\frac{c_2}{x} - 1 \right) - \zeta \left(\frac{c_2}{x} + 1 \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

In der zweiten Schreibweise tritt die Grösse auf, die uns schon eingehend beschäftigt hat, $\bar{x} : c_1$ oder wie wir früher schrieben $\bar{x} : x$.

Um wenigstens ein Beispiel zu diesen Formeln zu geben, wählen wir die Exponentialfunktion $\varphi(x) = k e^{-kx}$ und lassen x von einer unteren Grenzen c_1 bis ∞ laufen. Die Rechnungen sind hier sehr einfach; wir finden

$$K = \int_{c_1}^{\infty} \varphi(x) dx = k \int_{c_1}^{\infty} e^{-kx} dx = \left[-e^{-kx} \right]_{c_1}^{\infty} = e^{-kc_1}$$

$$L = \int_{c_1}^{\infty} \left\{ \int_x^{\infty} \varphi(z) dz \right\} dx = \int_{c_1}^{\infty} e^{-kx} dx = \left[-\frac{1}{k} e^{-kx} \right]_{c_1}^{\infty} = \frac{1}{k} e^{-kc_1}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{c_1}^{\infty} \left\{ \int_{c_1}^x \varphi(z) dz \cdot \int_x^{\infty} \varphi(z) dz \right\} dx = \int_{c_1}^{\infty} (e^{-kc_1} - e^{-kx}) e^{-kx} dx \\ &= \left[-\frac{1}{k} e^{-k(c_1+x)} + \frac{1}{2k} e^{-2kx} \right]_{c_1}^{\infty} = \frac{1}{2k} e^{-2kc_1} \end{aligned}$$

Aus $\bar{x} = c_1 + \frac{L}{K}$ bzw Formel (5) erhalten wir:

$$\frac{\bar{x}}{c_1} = 1 + \frac{1}{k c_1} \quad \zeta = \frac{1}{2(k c_1 + 1)}$$

Direkte Differentiation und Formel (6) geben beide

$$\frac{\partial \zeta}{\partial c_1} = -2k \zeta^2 < 0.$$

Hätten wir eine empirische Verteilung, die angenähert dem Exponentialgesetz gehorchte, so würden wir aus einem unvollständigen Material immer eine zu kleine Konzentration herausrechnen.

Die Formeln (6) können einmal dazu benutzt werden, aus einem unvollständigen Material die Konzentration der Gesamtverteilung zu schätzen. Sie erlauben es aber auch, die Frage zu beantworten, ob es Verteilungen gibt, deren Konzentrationsmass ζ von einer der beiden Grenzen unabhängig ist. Wir nehmen einmal an, es gäbe eine Verteilung $\varphi(x)$, für die $\frac{\partial \zeta}{\partial c_1} = 0$ ist. Dann folgte aus (6) $\zeta(2c_1 K + L) - L = 0$.

Unter Beachtung der Formeln (4) differenzieren wir diese Gleichung dreimal partiell nach c_1 .

$$\zeta (2 K - 2 c_1 \varphi (c_1) - K) - K = 0 \text{ oder } \zeta (K - 2 c_1 \varphi (c_1)) - K = 0$$

$$\zeta (-3 \varphi (c_1) - 2 c_1 \varphi' (c_1)) + \varphi (c_1) = 0$$

$$\zeta (-5 \varphi' (c_1) - 2 c_1 \varphi'' (c_1)) + \varphi' (c_1) = 0$$

Aus den beiden letzten Gleichungen eliminieren wir ζ :

$$3 \varphi (c_1) \varphi' (c_1) + 2 c_1 \varphi'^2 (c_1) = 5 \varphi (c_1) \varphi' (c_1) + 2 c_1 \varphi (c_1) \varphi'' (c_1)$$

$$2 c_1 (\varphi (c_1) \varphi'' (c_1) - \varphi'^2 (c_1)) + 2 \varphi (c_1) \varphi' (c_1) = 0$$

Es lassen sich die Variablen trennen und die Quadraturen sind ausführbar.

$$\frac{\varphi'' (c_1)}{\varphi' (c_1)} - \frac{\varphi' (c_1)}{\varphi (c_1)} + \frac{1}{c_1} = \frac{d}{d c_1} \ln \frac{c_1 \varphi' (c_1)}{\varphi (c_1)} = 0$$

$$\frac{\varphi' (c_1)}{\varphi (c_1)} = - \frac{1}{n + 1} \cdot \frac{1}{c_1}$$

$$\ln \frac{\varphi (c_1)}{k n} = \ln \frac{1}{c_1^{n+1}}$$

Schreiben wir statt c_1 wieder x , so ergibt sich:

$$\varphi (x) = \frac{k n}{x^{n+1}}$$

Wir haben die spezielle PARETO'schen Verteilung vor uns. Damit $\frac{\partial \zeta}{\partial c_1}$ wirklich erfüllt ist, müssen noch die üblichen Bedingungen dazu kommen: $n > 1$ und $c_2 = \infty$.

Hätten wir nach Verteilungen gefragt, für die das Konzentrationsmass von der oberen Grenze unabhängig ist, so wären wir wieder auf die PARETO'sche gekommen, mit den Nebenbedingungen $n > 1$ und $c_1 = 0$. Die letztere kann nicht streng erfüllt werden, da $\varphi (x)$ nach unendlich geht, wenn x nach 0 strebt. Doch ist für kleine positive

$c_1 \frac{\partial \zeta}{\partial c_2}$ praktisch gleich null.

Satz: Die einzige Verteilung, bei der das Konzentrationsmass von einer der Grenzen des Variationsbereiches unabhängig ist, ist

die spezielle PARETO'sche Verteilung. Nach (6) ist für dieselbe

$$\zeta = \frac{\frac{\bar{x}}{c_1} - 1}{\frac{\bar{x}}{c_1} + 1}$$

ζ hängt also von $\bar{x} : c_1$ allein ab, ein Ausdruck dessen Konstanz im PARETO'schen Falle schon früher nachgewiesen wurde. Die praktische Bedeutung dieser Tatsache liegt darin dass wir im PARETO'schen Falle die Konzentration der Gesamtverteilung aus jedem nach unten beliebig begrenzten, aber sonst vollständigen Abschnitt berechnen können.

Als Anwendung zu den bisherigen theoretischen Erörterungen wollen wir die Einkommensverteilung der natürlichen Personen im Deutschen Reiche nach der Finanzstatistik für 1926 diskutieren. Zunächst sei bemerkt, dass es sich nicht um das Bruttoeinkommen handelt, sondern dass Werbungskosten und Sonderleistungen vorweg in Abzug gebracht worden sind. Das Material gewinnen wir einmal aus den Angaben über den Steuerabzug vom Arbeitslohn (*) und dann aus den Ergebnissen der Einkommensteuerveranlagung (**). Die beiden Statistiken sind so aufgestellt, dass Doppelzählungen vermieden werden. Wir addieren daher die Pflichtigen und deren Einkommen und geben gleich die Ziffern für den Einkommensbereich über der Mindestgrenze c_1 .

| Eink. > c_1 RM. | Pflichtige | Eink. x 1000 RM. | \bar{x} RM. | $\bar{x} : c_1$ | d | d^2 |
|----------------------|------------|-----------------------|------------------|-----------------|-----|-------|
| 1500 | 7474 379 | 25 563 765 | 3420 | 2.280 + | 79 | 6241 |
| 3000 | 2341 318 | 14 937 571 | 6380 | 2.127 — | 74 | 5476 |
| 5000 | 862 390 | 9 329 698 | 10819 | 2.164 — | 37 | 1369 |
| 8000 | 333 325 | 6 072 168 | 18217 | 2.277 + | 76 | 5776 |
| 16000 | 97 278 | 3 541 535 | 36406 | 2.275 + | 74 | 5476 |
| 50000 | 13 224 | 1 454 756 | 109992 | 2.200 — | 1 | 1 |
| 100000 | 3 789 | 790 794 | 208708 | 2.087 — | 114 | 12996 |
| | | | | 15.410 | | 37335 |
| | | | : 7 | 2.201 | | 5334 |
| | | | | | | 2 |
| | | | | | | = 73 |

(*) "Wirtschaft u. Statistik", 1929, S. 20.

(**) Ebenda, 1929, S. 422.

Das wichtigste Ergebnis ist :

$$\bar{x} : c_1 = 2.201 \pm 0.073$$

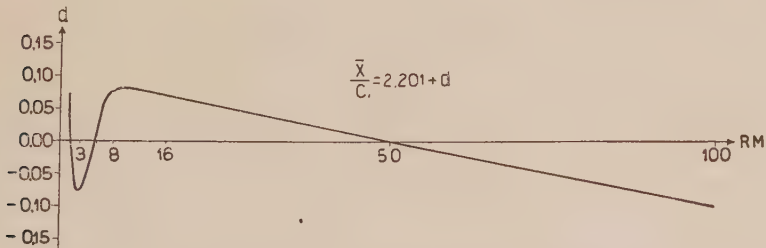
Diese Grösse, die im PARETO'schen Falle konstant sein müsste, hat also eine mittlere Schwankung von 3.3 % ihres Wertes. Man wird in erster Annäherung die Verteilung als PARETO-Verteilung ansprechen können und demgemäss n und ζ berechnen dürfen. Die Rechnung führen wir jeweils mit dem mittleren, dem kleinst- und dem grösstmöglichen Wert von $x : c_1$ aus und erhalten so für n und ζ die folgenden Bereiche :

$$n = \frac{\bar{x}}{c_1} : \left(\frac{\bar{x}}{c_1} - 1 \right) = 1.83 \pm 0.05$$

$$\zeta = \left(\frac{\bar{x}}{c_1} - 1 \right) : \left(\frac{\bar{x}}{c_1} + 1 \right) = 0.375 \pm 0.015$$

Hätte man in den üblichen Weise nach der Methode der kleinsten Quadrate der Verteilung eine PARETO-Kurve angepasst, so hätte man $n = 1.815$ erhalten.

Diese gute Uebereinstimmung darf uns aber nicht ruhen lassen. Sie gilt, wie es ja natürlich ist, auch nur für die gemittelte Funktion $\bar{x} : c_1$, nicht mehr für Verteilung der Pflichtigen. Zwischen Rechnung und Beobachtung klaffen hier Differenzen, die absolut auf 224698 Pflichtige und prozentual auf über 13 % ansteigen ! Den theoretischen Ausführungen entsprechend wollen wir uns aber an die Funktion $\bar{x} : c_1$ halten, deren Abweichung von der Horizontalen in der Tabelle mit d bezeichnet ist. Das folgende Schaubild stellt den Verlauf von $\bar{x} : c_1$ dar.



Die erste Frage ist, was an dieser Kurve typisch und was durch zufällige oder systematische Verfälschungen bedingt ist. Um der Antwort näher zu kommen, wird es zweckmässig sein, die Einkommens-

verteilung anderer Länder heranzuziehen. Da die Steuerfreigrenzen im Ausland z. T. erheblich höher liegen, ist das Material für die kleinen Einkommen meistens unvollständig und daher erst von einem mittleren Einkommen an verwertbar. Allgemeingültig scheint die Regel zu sein, dass die Funktion $\bar{x} : c_1$ für ein mittleres Einkommen ein Maximum erreicht und dann ganz gleichmässig langsam abfällt (*). Es dürfte wohl nicht berechtigt sein, diese Erscheinung dadurch deuten zu wollen, dass die erlaubten und unerlaubten Abzüge bei der Steuerdeklaration mit wachsendem Einkommen auch prozentual zunehmen. Vielmehr ist anzunehmen, dass die schwache, aber dauernde Tendenz zum Fallen, die die Funktion $\bar{x} : c_1$ für grosse x zeigt, reell ist. Wir haben früher festgestellt, dass für eine Verteilung, die sich additiv aus PARETO-Verteilungen zusammensetzt, die Funktion $\bar{x} : x$ monoton steigt. Das empirische Fallen dieser Grösse zeigt also an, dass die Verteilung des steuerbelasteten Einkommens sich nicht additiv aus PARETO-Verteilungen zusammensetzen kann. Wir hatten auch eine Verteilung angegeben, bei der $\bar{x} : x$ monoton fällt, nämlich $\bar{x} : x = 1 + 1 : (n - 1) x^k$. Hier bestünde praktisch eine Höchstgrenze für das Einkommen. Die Begrenztheit der menschlichen Lebensdauer und die Erbschaftssteuer verbieten aber auch in Wirklichkeit eine unbegrenzte Einkommenssteigerung. Für den Einkommensbereich über RM. 8000 liesse die obige Verteilung sicher eine sehr gute Darstellung zu mit den Werten $n = 1.0979$ und $k = 0.1946$. Unter 8000, jedenfalls unter 5000 RM., versagt diese Formel aber völlig.

Unterhalb der Grenze von 5000 RM. wird allerdings die Bedeutung des empirischen Zahlenmaterials unsicherer. Der Einfluss der vorweg abgezogenen Sonderleistungen und Werbungskosten (nach dem Einkommensteuergesetz mindestens 240 RM.) wird bedeutender. Man würde aber keinen besseren Anschluss an das PARETO'sche Gesetz erzielen, wenn man die deklarierten Einkommen um einen konstanten Betrag erhöhte. Es kann auch bezweifelt werden, ob der Personenkreis vollständig erfasst ist. Rentner, die ausschliesslich ein der Kapitalertragssteuer unterliegendes Einkommen von weniger als 8000 RM. bezogen, sind möglicherweise nicht mit aufgeführt.

Wie schon erwähnt, sind für kleine Einkommen die ausländischen Erhebungen zum grossen Teil unverwendbar. Die in dem bekannten

(*) *Die Einkommensschichtung im Deutschen Reich, in Frankreich, Grossbritannien, den Niederlanden und den U. S. A.* "Wirtschaft und Statistik", 1930, S. 592.

Lehrbuch von WESTERGAARD und NYBOLLE (*) mitgeteilte dänische Statistik aus dem Jahre 1920 macht eine Ausnahme. Sie erscheint mir für Einkommen über 3000 Kr. zuverlässig. Wir setzen wieder $\bar{x} : x = M + d$. Dann wird $M = 2.160$, von dem um sechs Jahren späteren deutschen Wert nur wenig abweichend. Für d ergeben sich die folgenden Werte, wobei wir das Mindesteinkommen c in 1000 Kr. ausdrücken :

| c^1 | 3 | 4 | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|-------|------|-------|-------|------|-------|-------|------|
| d | - 79 | - 233 | - 247 | + 87 | + 209 | + 154 | + 89 |

Die Streuung ist zwar grösser als bei unserem Hauptbeispiel, der Gesamtcharakter der Kurve ist aber der gleiche. Die Kurve zerfällt in zwei verschiedene Abschnitte. Die Grenze liegt im deutschen Fall zwischen 5000 und 8000 RM., im dänischen etwa 20 000 Kr. wobei die Entwertung in der ersten Nachkriegszeit zu berücksichtigen ist. Als Ursache dieser Erscheinung können wir die strukturelle Verschiedenheit der kleinen Einkommen, die im wesentlichen aus Arbeit stammen, und der grossen Einkommen, die in der Hauptsache aus Kapitalerträgen resultieren, vermuten.

(*) WESTERGAARD und NYBOLLE, *Grundzüge d. Theorie d. Statist.*, Jena 1928, S. 311.

VITTORIO CASTELLANO

**Sullo scarto quadratico medio della probabilità
di transvariazione**

SOMMARIO

§ 1 : *Generalità.* — 1) Concetto di probabilità di transvariazione ; 2) L'espressione analitica della probabilità di transvariazione. Caso di un gruppo e una quantità ; 3) Caso di due gruppi ; 4) Influenza del caso sul valore delle costanti statistiche. Espressione generale dello scarto quadratico medio ; 5) Espressione di esso nel caso della probabilità di transvariazione.

§ 2 : *Determinazione del valore medio di alcune funzioni degli scarti in un gruppo di osservazioni.* — 6) Estensione della legge normale al caso dell'estrazione in blocco da un'urna di palle di n colori diversi ; 7) Calcolo dei valori medi del prodotto di due, tre e quattro scarti nel problema precedente ; 8) Estensione delle formule al problema delle prove ripetute.

§ 3 : *Determinazione dello scarto quadratico medio della probabilità di transvariazione.* — A) Tra un gruppo ed una quantità : 9) Generalità ; 10) Caso in cui la quantità non coincida con nessuna delle quantità del gruppo ; 11) Caso in cui la quantità coincida con una quantità del gruppo. — B) Tra due gruppi : 12) Generalità ; 13) Caso in cui le quantità di un gruppo non coincidano con nessuna delle quantità dell'altro ; 14) Caso in cui le quantità dei due gruppi coincidano.

§ 4 : *Sull'ordine di grandezza dell'errore dello scarto quadratico medio.* — 15) Generalità. A) Caso di un gruppo e una quantità ; 16) B) Caso di due gruppi ; 17) Formula generale ; 18) Calcolo dei vari termini della precedente.

§ 5 : *Applicazioni statistiche.* — 19) Premesse e generalità ; 20) Probabilità di transvariazione tra i diametri delle cellule vitelline delle uova di due razze di bachi da seta ; 21) Probabilità di transvariazione tra le stature maschili e femminili risultanti da un'indagine antropologica sui genitori delle famiglie numerose di un Comune del Lazio ; 22) Esempi vari (Boldrini).

§ 1. — GENERALITÀ.

1. — Dati due gruppi di quantità si definisce « probabilità di transvariazione », rispetto ad una certa media, il doppio del rapporto tra il numero delle differenze di segno contrario a quella delle medie considerate, e il numero complessivo delle differenze che si possono istituire tra le quantità dei due gruppi, le differenze nulle essendo considerate una metà positive e una metà negative (1).

La probabilità di transvariazione è dunque uguale al doppio della probabilità che, estratte a caso una quantità da ciascun gruppo, la loro differenza risulti di segno contrario a quella delle medie considerate dei rispettivi gruppi.

Riferiremo in seguito la probabilità di transvariazione sempre alla mediana.

Per le curve di distribuzione dei gruppi che ordinariamente si presentano in Statistica, si può ammettere che la probabilità di transvariazione vari da 0 a 1 al diminuire della distanza tra le mediane, a parità di altre condizioni (2). Pertanto il suo valore denota il grado di tipicità del senso secondo cui differiscono le mediane.

(1) Cfr. C. GINI, *Il concetto di « transvariazione » e le sue prime applicazioni*. « Studi di Economia, Finanza e Statistica » editi dal « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », Roma, Athenaeum, 1916.

(2) È intuitivo che si possano costruire gruppi, asimmetrici, per i quali la probabilità di transvariazione assuma valori sensibilmente > 1 . Si parta, ad esempio, dalla considerazione di due curve simmetriche, C_1 e C_2 , aventi la stessa mediana. Si deformi una delle due curve, la C_1 , ad es., senza spostare la mediana. Sia C_3 la curva ottenuta. Mentre le differenze positive tra le quantità del Gruppo C_1 e quelle del gruppo C_2 erano nello stesso numero di quelle negative, tale eguaglianza non sussisterà più, in generale, tra i gruppi C_2 e C_3 . Si supponga, per es., che il numero delle differenze positive superi quello delle differenze negative, e si operi una translazione a sinistra della C_3 , nella direzione dell'asse delle ascisse. Aumentando la distanza tra le mediane diminuisce con continuità il numero delle differenze positive che si possono istituire tra le quantità dei due gruppi, fino a pareggiare quello delle differenze negative, quando la mediana di C_3 abbia raggiunto una certa distanza da quella di C_2 . Per tutti i gruppi C_3 le cui mediane cadano nell'intervallo la probabilità di transvariazione risulta maggior d'1.

Consideriamo, per dare un esempio nell'ordinario campo discontinuo, i gruppi G (2. 6. 6. 3. 3. 2. 2.) e H (3. 1. 1. 4. 2. 0. 0) essendo le cifre ordinatamente corrispondenti le frequenze delle stesse quantità 1, 2, . . . 7 nei due gruppi.

La mediana del gruppo G è 3, quella del gruppo H è 4. Le differenze positive

2. — Supponiamo che uno dei due gruppi sia composto di una sola quantità R .

Se R è minore della mediana del gruppo dato costituiscono transvariazioni con R tutte le quantità minori di R . Se R invece è maggiore costituiscono transvariazioni tutte le quantità maggiori di R .

« La probabilità di transvariazione tra un gruppo di quantità « G e una quantità R è uguale al doppio del rapporto tra il numero « delle quantità che sono dalla stessa banda di R rispetto alla mediana, « e il numero totale delle quantità del gruppo, le quantità coincidenti « con R essendo considerate metà a sinistra e metà a destra di R ».

Se $y = f(x)$ è la curva di distribuzione delle quantità del gruppo G (3) a e b sono le quantità estreme e X è la mediana, indicando con P_{GR} la probabilità di transvariazione di G con R risulta :

$$P_{GR} = \frac{2 \int_a^R f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad \text{se } R < X \quad [1]$$

$$P_{GR} = \frac{2 \int_R^b f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad \text{se } R > X$$

posto $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $F(b) = N$, risulta

$$P_{GR} = \frac{2 F(R)}{N} \quad [2] \quad \text{oppure} \quad P_{GR} = \frac{2 [N - F(R)]}{N} \quad [3]$$

Siccome il valore fornito dalla (3) è il complemento a 2 di quello fornito dalla [2], per il calcolo della P_{GR} non è necessario determinare la mediana del gruppo.

tra questo e quello sono 128. Le differenze nulle sono 36. Il numero complessivo delle differenze 264. Pertanto la probabilità di transvariazione tra essi è $\frac{2(128 + 18)}{264} = \frac{73}{66} = 1,106$.

Per più ampie considerazioni sull'argomento v. anche C. GINI, *Memorie di metodologia statistica*. Tip. Antoniana, Padova. Di imminente pubblicazione.

(3) Per comodità di notazioni pongo qui il problema nel campo continuo, ma la traduzione di esso in quello discontinuo è immediata.

3. — Consideriamo ora il caso di due gruppi effettivi G e Γ : siano $y = f(x)$ e $\eta = \varphi(\xi)$ le rispettive curve di frequenza, a e b , α e β le quantità estreme, X e X le mediane.

Si attribuisca a ciascuna delle due curve il valore 0 fuori del proprio campo di definizione: potremo allora supporre definiti i due gruppi entro lo stesso campo $t_1 t_2$.

Se $X < X$ la probabilità di transvariazione è espressa dalla formula (4):

$${}_1P_{G\Gamma} = \frac{2 \int_{t_1}^{t_2} f(x) \int_{t_1}^x \varphi(\xi) d\xi dx}{\int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \int_{t_1}^{t_2} \varphi(\xi) d\xi} = \frac{2 \int_{t_1}^{t_2} f(x) \Phi(x) dx}{N N} \quad [4]$$

essendosi posto:

$$N = \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx, \quad N = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(\xi) d\xi$$

Se $X > X$ risulta espressa invece dall'altra:

$${}_2P_{G\Gamma} = \frac{2 \int_{t_1}^{t_2} f(x) \int_x^{t_2} \varphi(\xi) d\xi dx}{\int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \int_{t_1}^{t_2} \varphi(\xi) d\xi} = \frac{2 \int_{t_1}^{t_2} f(x) [\Phi(t_2) - \Phi(x)] dx}{N N} = 2 - {}_1P_{G\Gamma} \quad [5]$$

In generale non occorre quindi, per calcolare la probabilità di transvariazione, determinare effettivamente la relazione di grandezza che passa tra le mediane, quando questa non riesca evidente ad un sommario esame delle due curve: basta applicare la [4] o la [5], ed accettare il valore che risulta se > 1 o il complemento a due se

Per $X = X$ si assume senz'altro $P_{G\Gamma} = 1$.

(4) A rigore, la formula sarebbe:

$${}_1P_{G\Gamma} = \frac{1}{N N} \left\{ 2 \int_{t_1}^{t_2} f(x) \Phi(x) dx - \int_{t_1}^{t_2} f(x) \varphi(x) (dx)^2 \right\},$$

ma il secondo integrale rappresenta una quantità che è infinitesima del 1° ordine rispetto all'altra.

La [4] e la [5] insieme sono equivalenti alla

$$P_{gr} = \frac{[|X - X| - (X - X)] \int f(x) \Phi(x) dx}{N N |X - X|} + \frac{[|X - X| + (X - X)] \int \varphi(\xi) F(\xi) d\xi}{N N |X - X|} \quad (5)$$

la quale definisce senza ambiguità la probabilità di transvariazione nel campo continuo.

Facilmente si ricava la corrispondente formula del caso di un gruppo e di una quantità.

Per $N = N = 1$ la [6] esprime la probabilità di transvariazione per mezzo delle curve di frequenza dei due gruppi.

4. — Il caso influisce in doppio modo nella formazione delle serie statistiche: sulla scelta delle osservazioni quando non sia possibile o non si vogliano considerare tutti i casi nei quali il fenomeno si manifesta e sulla misura dell'intensità del fenomeno: ma mentre gli errori di osservazione possono, idealmente, essere contenuti entro limiti compatibili col grado di precisione che si ritiene opportuno, nessun accorgimento varrebbe a restringere, intorno ai valori delle frequenze vere, l'ampiezza degli intervalli nei quali cadranno i valori delle frequenze osservate, una volta stabilito il numero delle osservazioni.

È quindi di capitale importanza lo studio dell'influenza del numero di osservazioni sulle costanti statistiche.

Nella sua accezione più generale il problema che si presenta è il seguente:

« Un fenomeno può presentare certe intensità con determinate probabilità: qual'è la probabilità che in un certo numero di osservazioni esso presenti ciascuna intensità un numero determinato di volte? ».

In altri termini: in un gruppo di osservazioni ciascun valore della intensità del fenomeno ha una certa frequenza uguale al rapporto tra il numero delle volte che compare nel gruppo e il numero totale delle osservazioni: qual'è la probabilità che ciascuna frequenza osservata differisca da quella propria della intensità del fenomeno di una quantità assegnata?

(5) Qui, e nel seguito ometto per comodità l'indicazione degli estremi d'integrazione, quando essi coincidono con gli estremi del campo di definizione.

Il problema è la generalizzazione di quello della composizione di un gruppo di palle estratte tutte insieme da un'urna contenente palle di diverso colore in proporzioni note. Però, se la totalità dei casi dai quali si estrae il campione è molto numerosa di fronte a questo, oppure se, ammesso che esista una legge di distribuzione costante del fenomeno e che solo fattori accidentali influiscano sulle sue manifestazioni nello spazio e nel tempo, si pensi la intera massa dei casi osservabili come un campione della totalità potenziale che segue la legge tipo, e si consideri come tale tutta, o una sua parte estratta a sorte, allora il problema equivale a quello delle prove ripetute, nella ipotesi di più alternative, e segue dal precedente con un passaggio al limite, facendo tendere all'infinito il numero delle palle contenute nell'urna.

La probabilità cercata è un funzionale: (6)

$P[\chi(x)]$, $\chi(x)$ essendo una funzione univoca, definita per tutti i valori della intensità del fenomeno, che può variare comunque entro un parallelogramma mistilineo (7) compatibilmente colla condizione

$$\int \chi(x) dx = 0. \quad [7]$$

Se C è una costante statistica esprimente una caratteristica di un fenomeno, o una relazione fra più fenomeni:

$$\bar{C} = C[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)], \quad n \geq 1,$$

le curve di frequenza osservate forniscono valori:

$$C' = C[f_i(x) + \chi_i(x)],$$

che al variare dei gruppi di osservazioni oscillano intorno al valore teorico \bar{C} (8).

Per il valore medio del quadrato dello scarto

$C' - C = \varepsilon(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n)$ si ottiene quindi la espressione:

$$M[(C' - C)^2] = \int P(\chi_1) \int P(\chi_2) \dots \int P(\chi_n) \varepsilon^2(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) d\chi_1 d\chi_2 \dots d\chi_n [8].$$

(6) Qui si suppone che il gruppo di osservazioni sia tale da poter sostituire all'istogramma che lo rappresenta una curva; non sarebbe invece esatto sostituire una curva calcolata, in quanto lo scostamento di questa dalla curva ideale del fenomeno non dipende più unicamente dal caso.

(7) Se $y = f(x)$ è la curva di frequenza del fenomeno e il numero dei casi possibili è infinito, o sufficientemente grande rispetto a quello dei casi osservati, la $\chi(x)$ è compresa tutta tra le curve $1 - f(x)$ e $-f(x)$.

(8) Sotto condizione $M(C') = \bar{C}$.

5. — Vediamo come si particolarizza la [8] quando ϵ^2 è il quadrato dello scarto della probabilità di transvariazione.

Supposto di conoscere la relazione di grandezza tra i valori mediani delle intensità dei due fenomeni, e sia ad es. $X < X$, occorre assumere per la probabilità di transvariazione, qualunque sieno le curve osservate dei due fenomeni (9) la espressione [4].

Indicando con $y = f(x) + l(x)$, $\eta = \varphi(x) + \lambda(x)$ le curve di frequenza risultanti dall'osservazione, si ha :

$$P'_{gr} = 2 \int [f(x) + l(x)] [\Phi(x) + \Lambda(x)] dx, \text{ dove } \Lambda(x) = \int_{x_1}^x \lambda(x) dx$$

Quindi

$$\epsilon = 2 \left\{ \int f(x) \Lambda(x) dx + \int l(x) [\Phi(x) + \Lambda(x)] dx \right\} \quad e$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 = 4 \left\{ \iint f(x_1) f(x_2) \Lambda(x_1) \Lambda(x_2) dx_1 dx_2 + \right. \\ \left. + \iint l(x_1) l(x_2) [\Phi(x_1) + \Lambda(x_1)] [\Phi(x_2) + \Lambda(x_2)] dx_1 dx_2 + \right. \\ \left. + 2 \iint f(x_1) \Lambda(x_1) l(x_2) [\Phi(x_2) + \Lambda(x_2)] dx_1 dx_2 \right\}. \end{aligned}$$

Simbolicamente, posto :

$$l(x_i) = l_i, \Lambda(x_i) = \Lambda_i \quad (i = 1, 2)$$

ciò è espresso dalla :

$$\epsilon^2 = \iint \Theta(l_1, l_2, \Lambda_1, \Lambda_2) dx_1 dx_2. \quad [9]$$

Θ assume nei punti \bar{x}_1 e \bar{x}_2 lo stesso valore per tutte le curve $l(x)$ e $\Lambda(x)$ che assumono in tali punti gli stessi valori.

(9) Cioè, senza riguardo alla relazione di grandezza tra le mediane dei campioni. Ciò segue dal fatto che quando due gruppi non sono considerati a sè, ma come campioni di due totalità, è il segno delle differenze tra le mediane di queste che definisce le quantità transgressive dei due gruppi. È un'osservazione questa da tener presente quando si disponga di una pluralità di campioni delle distribuzioni dei due fenomeni messi a confronto, e non tutte le copie concordassero rispetto al segno delle differenze tra i valori delle rispettive intensità mediane. Se per calcolare il valore medio empirico della probabilità di transvariazione si considerassero le singole coppie ciascuna indipendentemente dalle altre si otterrebbe un dato privo di significato logico, perchè media di dati eterogenei e più probabilmente inferiore che superiore a quello esatto, in quanto il procedimento errato seguito sostituisce, in generale, nei casi d'inversione della relazione di grandezza tra le mediane, a valori delle probabilità di transvariazione approssimati per eccesso, altri sistematicamente inferiori.

La probabilità che, in un gruppo di osservazioni, la curva degli scarti passi per due punti assegnati è quella che le frequenze delle intensità corrispondenti del fenomeno presentino due scarti assegnati. La probabilità che la curva integrale degli scarti passi per due punti assegnati è quella che le frequenze del complesso delle intensità che sono a sinistra (o a destra) di quelle corrispondenti ai punti dati, presentino due scarti assegnati.

Indicate con $P(l_1 l_2)$ la prima e con $P(\Lambda_1 \Lambda_2)$ la seconda, risulta per la [8] la espressione:

$$\begin{aligned} M(\varepsilon^2) &= \iint P[l] | P[\Lambda] | \iint \Theta(l_1 l_2 \Lambda_1 \Lambda_2) d x_1 d x_2 d l d \Lambda = \\ &= \iint d x_1 d x_2 \iint P[l] | P[\Lambda] | \Theta(l_1 l_2 \Lambda_1 \Lambda_2) d l d \Lambda = \\ &= \iint d x_1 d x_2 \iiint P(l_1 l_2) P(\Lambda_1 \Lambda_2) \Theta(l_1 l_2 \Lambda_1 \Lambda_2) d l_1 d l_2 d \Lambda_1 d \Lambda_2 = \\ &= \iint M[\Theta(l_1 l_2 \Lambda_1 \Lambda_2)] d x_1 d x_2. \end{aligned} \quad [10]$$

Le eguaglianze [10] costituiscono in fondo la dimostrazione nel campo continuo del teorema del valor medio della somma di più variabili casuali.

Θ è la somma di più termini, ciascuno dei quali è, per ogni x , il prodotto di una costante per il prodotto di due scarti. Il problema è quindi ricondotto alla determinazione dei valori medi del prodotto di due scarti.

Per gli sviluppi del paragrafo 4 tratterò più ampiamente questo problema determinando, nel paragrafo che segue, anche i valori medi del prodotto di tre e quattro scarti.

§ 2. — DETERMINAZIONE DEL VALORE MEDIO DI ALCUNE FUNZIONI DEGLI SCARTI IN UN GRUPPO DI OSSERVAZIONI.

6. — L'intensità di un fenomeno presenti i valori x_1, x_2, \dots, x_k con le probabilità p_1, p_2, \dots, p_k . Sia N il numero dei casi nei quali esso si manifesta, N essendo un numero finito o infinitamente grande. Ciascuna quantità x_i si presenterà in un numero $n_i = N p_i$ di casi.

In un numero N_0 di casi ciascuna quantità di presenterà un numero $N_0(p_i + \varepsilon_i)$ di volte. Se il gruppo delle N_0 osservazioni non è scelto, la probabilità di un sistema $l_1 = N_0 \varepsilon_1, l_2 = N_0 \varepsilon_2, \dots, l_k = N_0 \varepsilon_k$ di scarti è quella che si verificherebbe nell'estrazione di un blocco di N_0 palle tutte uguali da un'urna che ne contenga N delle quali n_1 contrassegnate dal $n. 1, n_2$ dal $2, \dots, n_k$ dal k .

Qual'è la probabilità che 1, 2 h scarti presentino un valore assegnato ?

Si considerino uguali le $n_{h+1} + n_{h+2} + \dots + n_h$ palle contrassegnate dai numeri $h+1, h+2, \dots, k$ ponendo ad esempio $k = h+1$.

Siano l_1, l_2, \dots, l_h i valori assegnati degli scarti relativi alle palle 1, 2 . . . h . Il gruppo composto delle restanti palle presenterà uno scarto $l_{h+1} = -l_1 - l_2 - \dots - l_h$. Quindi, indicando con $P_{l_1 l_2 \dots l_h}$ la probabilità richiesta, si ottiene :

$$P_{l_1 l_2 \dots l_h} = \frac{\binom{n_1}{\frac{N_o}{N} n_1 + l_1} \binom{n_2}{\frac{N_o}{N} n_2 + l_2} \dots \binom{n_h}{\frac{N_o}{N} n_h + l_h} \binom{n_{h+1}}{\frac{N_o}{N} n_{h+1} + l_{h+1}}}{\binom{N}{N_o}} \quad [11]$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per

$$\left(\frac{N_o}{N}\right)^{N_o} = p^{N_o} \quad \text{e} \quad \left(\frac{N-N_o}{N}\right)^{N-N_o} = q^{N-N_o}$$

ricordando che $\sum_1^{h+1} n_i = N$, $\sum_1^{h+1} l_i = 0$ si ha

$$P_{l_1 l_2 \dots l_h} = \frac{\prod_1^{h+1} \binom{n_i}{p n_i + l_i} p^{n_i p + l_i} q^{n_i q - l_i}}{\binom{N}{N p} p^{N p} q^{N q}} = \frac{\prod_1^{h+1} P_{l_i}(n_i)}{P_o(N)}$$

essendosi indicata con $P_{l_i}(n_i)$ la probabilità di ottenere uno scarto l_i su n_i prove nel problema di Bernoulli delle prove ripetute.

$$\text{Posto: } h_i = \frac{1}{\sqrt{2 n_i p q}} \quad h_o = \frac{1}{\sqrt{2 N p q}}$$

$$\text{essendo } P_{l_i}(n_i) = \frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 l_i^2}, \quad P_o(N) = \frac{h_o}{\sqrt{\pi}}$$

risulta :

$$P_{l_1 l_2 \dots l_h} = \frac{h_1 h_2 \dots h_{h+1}}{h_o \pi^{\frac{h}{2}}} e^{-(h_1^2 l_1^2 + h_2^2 l_2^2 + \dots + h_{h+1}^2 l_{h+1}^2)} \quad [12]$$

Da questa si ricava immediatamente :

$$A_1 = -\pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} c^{-\frac{3}{2}} b e^{a c^{-1} b^2 t^2} t$$

$$A_2 = \pi^{\frac{1}{2}} [(2c)^{-1} + a c^{-2} b^2 t^2] a^{-\frac{3}{2}} c^{-\frac{1}{2}} e^{a c^{-1} b^2 t^2}$$

$$A_3 = -\pi^{\frac{1}{2}} [3 a^{\frac{1}{2}} (2c^2)^{-1} b t + a^2 c^{-3} b^3 t^3] a^{-2} c^{-\frac{1}{2}} e^{a c^{-1} b^2 t^2}$$

$$A_4 = \pi^{\frac{1}{2}} [3 (4c^2)^{-1} + 3 a c^{-3} b^2 t^2 + a^2 c^{-4} b^4 t^4] a^{-\frac{5}{2}} c^{-\frac{1}{2}} e^{a c^{-1} b^2 t^2}$$

e per $b = 0$, $c = 1$:

$$A_2 = \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} \pi^{\frac{1}{2}}, \quad A_4 = \frac{3}{4} a^{-\frac{5}{2}} \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Procediamo ora al calcolo dei valori medi che ci interessano :

a) $h = 1$ Per $\Theta_h(x) = x_1$ risulta $M(l_1) = 0$;

Per $\Theta_h(x) = x_1^3$ risulta $M(l_1^3) = 0$. [15]

b) Si ponga $h = 2$, $\Theta_i(x) = x_i$. Risulta :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \int x_2 e^{-f^2 n_1} \{ (n_2 + n_3) x_1^2 + 2 n_3 x_1 x_2 \} d x_2 = \\ &= -\pi^{\frac{1}{2}} f^{-1} n_1^{-\frac{1}{2}} (n_2 + n_3)^{-\frac{3}{2}} n_2 e^{n_1 f^2} n_2^2 x_1^2 x_1, \quad e: \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \int x e^{-f^2 (n_2 + n_3) x_1^2} \Delta_2 d x_1 = -\pi^{\frac{1}{2}} f^{-1} n_1^{-\frac{1}{2}} (n_2 + n_3)^{-\frac{3}{2}} n_2 S_1.$$

essendosi posto

$$S_1 = \int x_1^2 e^{-f^2 \frac{n_2}{n_2 + n_3}} \{ (n_1 + n_3) (n_2 + n_3) (-n_1 n_3) \} x_1^2 d x_1.$$

Poichè

$$S_1 = \frac{1}{2} (n_2 + n_3)^{\frac{3}{2}} f^{-3} (n_2 n_3 N)^{-\frac{3}{2}} \pi^{\frac{1}{2}}$$

sostituendo si ha :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\frac{2 N_0^2 (N - N_0)^2 (n_1 n_2 n_3)^2 n_1 n_2}{N^{\frac{11}{2}}} \\ V \Delta_1 &= -\frac{N_0 (N - N_0) n_1 n_2}{N_0^3} = M(l_1 l_2) \end{aligned} \quad [16]$$

Se nella [16] si pone $l_2 = -l_1$, $n_2 = N - n_1$, si ottiene per il quadrato dello scarto quadratico medio di l_1 l'espressione:

$$M(l_1^2) = \frac{N_0 (N - N_0) n_1 (N - n_1)}{N^3} \quad [17]$$

posta questa sotto la forma:

$$M(l_1^2) = N_0 p_1 q_1 \left[1 - \frac{N_0}{N} \right]$$

si vede che, per N_0 non troppo piccolo, non differisce sensibilmente dalla formula esatta, che con le nostre notazioni si scrive:

$$M(l_1^2) = N_0 p_1 q_1 \left[1 - \frac{N_0 - 1}{N - 1} \right] \quad [17']$$

La differenza dipende dal fatto che la (12), dalla quale siamo partiti, è una formula approssimata.

Se nella prima espressione di Δ_1 si sostituisce x_1^2 al posto di x_1 , diventa $S_1 = 0$: pertanto si conclude che $M(l_1^2 l_2) = 0$. [18]

Sostituendo invece x_1^3 al posto di x_1 risulta:

$$S_1 = \int x_1^4 e^{-f^{\frac{n_1 n_2}{n_2 + n_1} N x_1^2}} dx_1 = \frac{3}{4} \frac{\pi^{\frac{1}{2}} (n_2 + n_3)^{\frac{5}{2}}}{f^5 (n_2 n_3 N)^{\frac{5}{2}}}$$

da cui

$$\Delta_1 = \frac{3}{4} \frac{\pi (n_2 + n_3) n_2}{f^6 n_1^{\frac{1}{2}} (n_2 n_3 N)^{\frac{5}{2}}} = \frac{6 \pi (N - N_0)^3 N_0^3 (n_2 + n_3) (n_1 n_2 n_3)^{\frac{1}{2}} n_1^{\frac{1}{2}} n_2}{N^{\frac{17}{2}}}$$

e quindi

$$V \Delta_1 = - \frac{3 N_0^2 (N - N_0)^2 n_1^2 n_2 (N - n_1)}{N^6} = M(l_1^3 l_2) \quad [19]$$

Posto in questa

$$n_2 = N - n_1, \quad l_2 = -l_1$$

risulta ancora

$$M(l_1^4) = \frac{3 N_0^2 (N - N_0)^2 n_1^2 (N - n_1)^2}{N^6} \quad [20]$$

Facendo infine

$$\Theta_1(x_1) = x_1^2, \quad \Theta_2(x_2) = x_2^2$$

risulta

$$\Delta_2 = \left[\frac{1}{2(n_2 + n_3)} + \frac{f^2 n_1 n_2 x_1^2}{(n_2 + n_3)^2} \right] \pi^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{f^3 n_1 n_2^3 x_1^3}{n_2 + n_3}}}{f^3 n_1^{\frac{3}{2}} (n_2 + n_3)^{\frac{1}{2}}}$$

sostituendo

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{f^3 (n_2 + n_3)^{\frac{1}{2}} n_1^{\frac{3}{2}}} \int \left[\frac{1}{2(n_2 + n_3)} x_1^2 + \frac{f^2 n_1 n_2^2}{(n_2 + n_3)^2} x_1^4 \right] e^{-\frac{f^3 n_1 n_2}{n_2 + n_3} N x^2} dx_1 \\ &= \frac{\pi}{4 f^6 (n_1 n_2 n_3)^{\frac{3}{2}} N^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\pi}{4 f^6 (n_1 n_2)^{\frac{1}{2}} n_3^{\frac{5}{2}} N^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{2\pi N_0^3 (N - N_0)^3 (n_1 n_2 n_3)^{\frac{3}{2}}}{N^{\frac{15}{2}}} + \frac{6\pi N_0^3 (N - N_0)^3 (n_1 n_2)^{\frac{5}{2}} n_3^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{17}{2}}} \end{aligned}$$

e quindi

$$V \Delta_1 = M (l_1^2 l_1^2) = \frac{N_0^2 (N - N_0)^2 n_1 n_2 n_3}{N^5} + \frac{3 N_0^2 (N - N_0) n_1^2 n_2^2}{N^6} [21]$$

ponendo in questa

$$n_2 = N - n_1, \quad n_3 = 0, \quad l_2 = -l_1$$

si ricava nuovamente la [20].

$$c) \text{ Si ponga } h = 3 \quad \Theta_1(x_1) = x_1 \quad \Theta_2(x_2) = x_2 \quad \Theta_3(x_3) = x_3.$$

Risulta :

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \int x_3 e^{-\frac{f^3 n_1 n_2}{n_3 + n_4} x_3^3 + 2 n_3 (x_1 + x_2) x_3} dx_3 \\ &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} n_3 e^{\frac{f^3 n_1 n_2}{n_3 + n_4} n_2^3 (x_1 + x_2)^3}}{f (n_1 n_2)^{\frac{1}{2}} (n_3 + n_4)^{\frac{3}{2}}} (x_1 + x_3), \quad \text{da cui} \\ \Delta_2 &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} n_3 e^{\frac{f^3 n_1 n_2}{n_3 + n_4} n_2^3 x_1^3}}{f (n_1 n_2)^{\frac{1}{2}} (n_3 + n_4)^{\frac{3}{2}}} S_2 \quad \text{ove} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \int x_2 (x_1 + x_2) e^{-f^2 \frac{n_1 n_2 n_4}{n_3 + n_4} \{ (n_2 + n_3 + n_4) x_1^2 + 2 n_2 x_1 x_2 \}} dx_2 \\
 &= \frac{\frac{1}{\pi^2} e^{\frac{f^2 n_1 n_2 n_4 n_2^2 x_1^2}{(n_3 + n_4)(n_2 + n_3 + n_4)}}}{f^3 (n_1 n_3 n_4)^{\frac{3}{2}} (n_2 + n_3 + n_4)^{\frac{3}{2}}} (n_3 + n_4)^{\frac{3}{2}} \times \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{2} + \frac{f^2 n_1 n_3 n_4 n_2^2}{(n_3 + n_4)(n_2 + n_3 + n_4)} x_1^2 - f^2 \frac{n_1 n_3 n_4}{n_3 + n_4} n_2 x_1 \right]
 \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\Delta_2 = - \frac{\frac{1}{\pi^2} e^{\frac{f^2 (n_2 + n_3) n_1 n_2 n_4}{n_2 + n_3 + n_4} x_1^2} (n_2 n_3)^{\frac{1}{2}}}{f^2 n_1 n_4^{\frac{1}{2}} (n_2 + n_3 + n_4)^{\frac{5}{2}}} \left[\frac{n_2 + n_3 + n_4}{2 f^2 n_1 n_2 n_3 n_4} - x_1^2 \right]$$

Δ_2 è una funzione pari di x_1 , sicchè risulta $\Delta_1 = 0$ e quindi

$$M(l_1 l_2 l_3) = 0. \quad [22]$$

Sostituiamo x_1^2 al posto di x_1 in Δ_1 . Risultata:

$$\Delta_1 = \frac{\pi (n_2 n_3)^{\frac{1}{2}}}{f^2 n_1 n_4^{\frac{1}{2}} (n_2 + n_3 + n_4)^{\frac{5}{2}}} S_1 \quad \text{ove}$$

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int \left[\frac{n_2 + n_3 + n_4}{2 f^2 n_1 n_2 n_3 n_4} x_1^2 - x_1^4 \right] e^{-\frac{f^2 n_2 n_3 n_4}{n_2 + n_3 + n_4} N x_1^2} dx_1 = \\
 &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} (n_2 + n_3 + n_4)^{\frac{5}{2}}}{4 f^5 (n_2 n_3 n_4 N)^{\frac{5}{2}} n_1} (N - 3 n_1)
 \end{aligned}$$

da cui

$$\Delta_1 = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} (3 n_1 - N)}{4 f^7 (n_1 n_2 n_3 n_4)^2 n_4 N^{\frac{5}{2}}} = \frac{(2 \pi)^{\frac{3}{2}} N_0^{\frac{7}{2}} (N - N_0)^{\frac{7}{2}} (n_1 n_2 n_3 n_4)^{\frac{3}{2}}}{n_4 N^{\frac{19}{2}}} (3 n_1 - N)$$

$$V \Delta_1 = M(l_1^2 l_2 l_3) = \frac{N_0^2 (N - N_0)^2 n_1 n_2 n_3}{N^6} (3 n_1 - N) \quad [23]$$

$$d) \quad h = 4 \quad \Theta_1(x_1) = x_1 \quad \Theta_2(x_2) = x_2 \quad \Theta_3(x_3) = x_3 \quad \Theta_4(x_4) = x_4.$$

Risulta :

$$\Delta_4 = \int x_4 e^{-f^2 \frac{n_1 n_2 n_3}{n_4 + n_5} \{ (n_4 + n_5) x_4^2 + 2 n_4 (x_1 x_2 x_3) x_4 \}} dx_4 =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} n_4 (x_1 + x_2 + x_3)}{f (n_1 n_2 n_3)^{\frac{1}{2}} (n_4 + n_5)^{\frac{3}{2}}} e^{f^2 \frac{n_1 n_2 n_3}{n_4 + n_5} n_4^2 (x_1 + x_2 + x_3)^2}$$

Sostituendo nell'espressione di Δ_3 :

$$\Delta_3 = - \frac{\pi^{\frac{1}{2}} n_4}{f (n_1 n_2 n_3)^{\frac{1}{2}} (n_4 + n_5)^{\frac{3}{2}}} S_3 \quad \text{ove}$$

$$S_3 = \int [x_3^2 + (x_1 + x_2) x_3] e^{-f^2 \frac{n_1 n_2 n_4 n_5}{n_3 + n_4 + n_5} \{ (n_3 + n_4 + n_5) x_3^2 + 2 n_3 (x_1 + x_2) x_3 \}} dx_3$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} (n_4 + n_5)^{\frac{3}{2}} n_3 e^{f^2 \frac{n_1 n_2 n_4 n_5}{n_3 + n_4 + n_5} (x_1 + x_2)^2}}{f (n_1 n_2 n_4 n_5)^{\frac{1}{2}} (n_3 + n_4 + n_5)^{\frac{5}{2}}} \left[\frac{n_3 + n_4 + n_5}{2 f^2 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5} - (x_1 + x_2)^2 \right]$$

e sostituendo

$$\Delta_3 = \pi (n_3 n_4)^{\frac{1}{2}} e^{f^2 \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 (n_3 + n_4)}{n_3 + n_4 + n_5} (x_1 + x_2)^2} \left[(x_1 + x_2)^2 - \frac{n_3 + n_4 + n_5}{2 f^2 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5} \right]$$

per Δ_2 si ha allora l'espressione :

$$\Delta_2 = \frac{\pi n_3^{\frac{1}{2}} n_4^{\frac{1}{2}} e^{f^2 \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 (n_3 + n_4)}{n_3 + n_4 + n_5} x_1^2}}{f^2 n_1 n_2 n_5^{\frac{1}{2}} (n_3 + n_4 + n_5)^{\frac{5}{2}}} S_2 \quad \text{ove}$$

$$S_2 = \int \left\{ x_1^2 - \frac{n_3 + n_4 + n_5}{2 f^2 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5} \right\} x_2 + 2 x_1 x_2^2 + x_2^3 \Big\} \times$$

$$\times e^{-f^2 \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5}{n_2 + n_3 + n_4 + n_5} \{ (n_2 + n_3 + n_4 + n_5) x_2^2 + 2 n_2 x_1 x_2 \}} dx_2$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} (n_3 + n_4 + n_5) e^{f^2 \frac{n_1 n_2 n_4 n_5 n_2^2 x_1^2}{(n_2 + n_3 + n_4 + n_5) (n_2 + n_3 + n_4 + n_5)}}}{f^3 (n_1 n_3 n_4 n_5)^{\frac{3}{2}} (n_2 + n_3 + n_4 + n_5)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{3 (n_2 + n_3 + n_4 + n_5) - 3 n_2}{2 (n_2 + n_3 + n_4 + n_5)} x_1 - \right.$$

$$\left. - f^2 \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 [(n_2 + n_3 + n_4 + n_5)^2 - 2 n_2 (n_2 + n_3 + n_4 + n_5) + n_2^2]}{(n_3 + n_4 + n_5) (n_2 + n_3 + n_4 + n_5)^2} x_1^3 \right\}$$

Sostituendo nell'espressione di Δ_2

$$\Delta_2 = \pi^{\frac{3}{2}} e^{f^3 \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 (n_2 + n_3 + n_4)}{n_2 + n_3 + n_4 + n_5} x_1^2} \left\{ \frac{3}{2} \frac{(n_2 + n_3 + n_4 + n_5)}{f^2 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5} x_1 - x_{13} \right\}$$

$$\text{da cui } \Delta_1 = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{f^3 n_1^2 n_5 (n_2 + n_3 + n_4 + n_5)^{\frac{7}{2}}} S_1 \quad \text{ove}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int \left[\frac{3 (n_2 + n_3 + n_4 + n_5)}{2 f^2 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5} x_1^2 - x_1^4 \right] e^{-f^3 \frac{n_2 n_3 n_4 n_5}{n_2 + n_3 + n_4 + n_5} N x_1^2} dx_1 \\ &= \frac{3 \pi^{\frac{1}{2}} (n_2 + n_3 + n_4 + n_5)^{\frac{7}{2}}}{4 f^3 n_1 (n_2 n_3 n_4)^{\frac{5}{2}} N^{\frac{5}{2}} n_5^2} \end{aligned}$$

Sostituendo si ha :

$$\Delta_1 = \frac{3 \pi^2}{4 f^3 n_5^{\frac{7}{2}} (n_1 n_2 n_3 n_4)^{\frac{5}{2}} N^{\frac{5}{2}}} = \frac{12 \pi^2 (n_1 n_2 n_3 n_4)^{\frac{3}{2}} n_5^{\frac{1}{2}} N_0^4 (N - N_0)^4}{N^{\frac{21}{2}}}$$

$$\text{da cui } V \Delta_1 = M (l_1 l_2 l_3 l_4) = \frac{3 N_0^2 (N - N_0)^2 n_1 n_2 n_3 n_4}{N^6} \quad [24]$$

8. — Riuniamo nel seguente specchio le formule cui siamo pervenuti, alle quali ci richiameremo sovente nel seguito :

$$h = 1$$

$$M (l_1) = M (l_1^3) = 0 \quad [15]$$

$$M (l_1^2) = - \frac{N_0 (N - N_0) n_1 (N - n_1)}{N^3} \quad [17]$$

$$M (l_1^4) = \frac{3 N_0^2 (N - N_0)^2 n_1^2 (N - n_1)^2}{N^6} \quad [20]$$

$$h = 2$$

$$M (l_1 l_2) = - \frac{N_0 (N - N_0) n_1 n_2}{N^3} \quad [16]$$

$$M (l_1^2 l_2) = 0 \quad [18]$$

$$M(l_1^3 l_2) = - \frac{3 N_o^2 (N - N_o)^2 n_1^2 n_2 (N - n_1)}{N^6} \quad [19]$$

$$M(l_1^2 l_2^2) = \frac{N_o^2 (N - N_o)^2 n_1 n_2 n_3}{N^5} + \frac{3 N_o^2 (N - N_o)^2 n_1^2 n_2^2}{N^6} \quad [21]$$

$$h = 3$$

$$M(l_1 l_2 l_3) = 0 \quad [22]$$

$$M(l_1^2 l_2 l_3) = \frac{N_o^2 (N - N_o)^2 n_1 n_2 n_3}{N^6} (3 n_1 - N) \quad [23]$$

$$h = 4$$

$$M(l_1 l_2 l_3 l_4) = \frac{3 N_o^2 (N - N_o)^2 n_1 n_2 n_3 n_4}{N^6} \quad [24]$$

Consideriamo una qualsiasi delle formule precedenti, ad esempio l'ultima.

Si ponga $p = \frac{N_o}{N}$. Risulta:

$$M(l_1 l_2 l_3 l_4) = \frac{3 (1 - p)^2 n_1 n_2 n_3 n_4 p^4}{N_o^2}.$$

Si osservi che al variare di N (e quindi di p) il fattore $n_i p$, uguale al valor medio del numero delle volte che si presenta l'intensità x_i in N_o osservazioni, resta costante. Al crescere indefinitamente di N p tende a zero. Pertanto, quando il numero dei casi osservati sia trascurabile rispetto a quello dei casi possibili (e esattamente per $N = \infty$) le formule precedenti diventano

$$M(l_1) = 0 \quad [15']$$

$$M(l_1^2) = \frac{n_1 (N_o - n_1)}{N_o} \quad [17']$$

$$M(l_1^3) = 0 \quad [15']$$

$$M(l_1^4) = \frac{3 n_1^2 (N_o - n_1)^2}{N_o^2} \quad [20']$$

$$M(l_1 l_2) = -\frac{n_1 n_2}{N_0} \quad [16']$$

$$M(l_1^2 l_2) = 0 \quad [18']$$

$$M(l_1^3 l_2) = -\frac{2 n_1^2 n_2 (N_0 - n_1)}{N_0^2} \quad [19']$$

$$M(l_1^2 l_2^2) = \frac{n_1 n_2 n_3}{N_0} + \frac{3 n_1^2 n_2^2}{N_0^2} \quad [21']$$

$$M(l_1 l_2 l_3) = 0 \quad [22']$$

$$M(l_1^2 l_2 l_3) = \frac{n_1 n_2 n_3}{N_0^2} (3 n_1 - N_0) \quad [23']$$

$$M(l_1 l_2 l_3 l_4) = \frac{3 n_1 n_2 n_3 n_4}{N_0^2} \quad [24']$$

dove le n_i sono le ordinate della curva di distribuzione del fenomeno, ragguagliato a N_0 il numero dei casi nei quali questo si manifesta.

Le formule [17'] e [16'] sono esatte come risulta dal calcolo diretto di $M(l_1^2)$ e $M(l_1 l_2)$.

§ 3. — DETERMINAZIONE DELLO SCARTO QUADRATICO MEDIO DELLA PROBABILITÀ DI TRANSVARIAZIONE.

A) *Tra un gruppo e una quantità.*

9. — Sia un gruppo G di N quantità, delle quali n_1 presentano il valore x_1 , n_2 il valore x_2 , ... n_k il valore x_k : $\sum n_i = N$.

Si ponga $\sum_i^j n_i = N_j$. Se $N_j = \frac{1}{2} N$ mediana del gruppo G è una qualsiasi quantità X compresa tra le quantità successive x_j e x_{j+1} ; se $N_{j-1} < \frac{1}{2} N < N_j$ è mediana del gruppo la quantità x_j .

Sia la quantità R compresa tra le quantità successive x_i e x_{i+1} essendo $i < j$: quindi $R < X$.

la probabilità di transvariazione tra il gruppo G e R rispetto a X è

$$P_{GR} = \frac{2 N_i}{N} \quad [25]$$

10. — Consideriamo un gruppo G' di N_0 quantità estratte a sorte, tutte insieme da G . Esso sarà composto di $\frac{N_0}{N} N_i + L_i$ quantità x_i , x_2, \dots, x_i e $\frac{N_0}{N} (N - N_i) - L_i$ quantità $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_h$.

Indichiamo con X' la mediana di G' . La probabilità di transvariazione tra il gruppo G' e la quantità R rispetto alla mediana sarà:

$$P'_{GR} = \frac{2 N_i}{N} + \frac{2 L_i}{N_0} \quad [26] \quad \text{oppure} \quad P''_{GR} = 2 - P'_{GR} \quad [27]$$

a seconda che sia X' maggiore o minore di R .

Per $X' \equiv R$, ciò che si verifica sempre che sia $x_i < X' < x_{i+1}$ le due espressioni coincidono.

Corrispondentemente lo scarto ε assume i valori:

$$\varepsilon' = P'_{GR} - P_{GR} = \frac{2 L_i}{N_0} [28] \quad \text{e} \quad \varepsilon'' = P''_{GR} - P_{GR} = 2(1 - P_{GR}) \varepsilon' [29].$$

Rispetto alla mediana X del gruppo G sono però le [26] e [28] che esprimono in tutti i casi il valore empirico della probabilità di transvariazione e l'errore da cui esso è affetto (10).

(10) Osserviamo che se $X' < R$ risulta $P'_{GR} > 1$ e $\varepsilon' > 1 - P_{GR} > 0$: pertanto dalla [29] si ha $\varepsilon' < 1 - P_{GR}$, e poichè

$$|\varepsilon'| = \begin{cases} 2(1 - P_{GR}) - |\varepsilon''| & \text{se } \varepsilon'' > 0 \\ 2(1 - P_{GR}) + |\varepsilon''| & \text{se } \varepsilon'' < 0 \end{cases}$$

segue in ogni caso che $|\varepsilon''| < |\varepsilon'|$.

Ciò oltre a dimostrare, in questo caso di un gruppo e una quantità, quanto abbiamo affermato in fondo alla nota (9), mette anche in evidenza il fatto che, viceversa, il valore della probabilità di transvariazione tra un gruppo e una quantità tratto da un dato campione, rispetto alle mediane di esso, è più approssimato del suo valore complementare, che si dovrebbe assumere, qualora si sappia che c'è stata inversione nella relazione tra la mediana e la quantità.

In tali casi pertanto non si terrà conto della relazione di grandezza tra mediana e quantità che il campione dimostra, ma si assumerà il valore della probabilità di transvariazione che in base a tale relazione si calcola. Usando tale accorgimento si riduce un poco la variabilità effettiva della costante, misurata dalla [31]. Sarebbe interessante dare una misura precisa di tale riduzione e dell'influenza che su di essa esercita la distanza della R dalla mediana della totalità. È però da notare a questo proposito che quando tale distanza è maggiore e le differenze $|\varepsilon'| - |\varepsilon''|$ possono essere maggiori, le inversioni sono meno frequenti, e quando sono più frequenti le differenze $|\varepsilon'| - |\varepsilon''|$ sono minori.

Pertanto assumeremo

$$M(\epsilon^2) = \frac{4}{N_o^2} M(L_i^2) \quad [30]$$

Applicando la [17] si ha :

$$M(\epsilon^2) = \frac{4}{N_o^2} \frac{N_o(N - N_o) N_i(N - N_i)}{N^3} \quad \text{cioè}$$

$$M(\epsilon^2) = \frac{4}{N_o} \frac{(N - N_o) N_i(N - N_i)}{N^3}. \quad [31]$$

Per N_o trascurabile nei confronti di N la formula si semplifica.

$$M(\epsilon^2) = \frac{1}{N_o} \frac{4 N_i(N_o - N_i)}{N_o^2} \quad [32]$$

Con le notazioni del n. 6, paragrafo II, la [32] diventa :

$$M(\epsilon^2) = \frac{4 P_i Q_i}{N_o}$$

ove si ponga

$$P_i = p_1 + p_2 + \dots + p_i, \quad Q_i = 1 - P_i.$$

Poichè

$$P_{GR} = 2 P_i, \quad 2 - P_{GR} = 2 Q_i$$

concludiamo :

« lo scarto quadratico medio della probabilità di transvariazione tra un gruppo ed una quantità è uguale alla media geometrica del valore della probabilità stessa e del suo complemento a 2, divisa per la radice quadrata del numero delle quantità di cui si compone il gruppo » ;

Posto $\sigma = \sqrt{M(\epsilon^2)}$ la [32] si scrive

$$\sigma = \sqrt{\frac{P_{GR}(2 - P_{GR})}{N_o}} = 2 \sqrt{\frac{N_i(N_o - N_i)}{N_o^3}}. \quad [33]$$

II. — Consideriamo ora il caso, molto frequente, che R coincida con una quantità del gruppo, ad es x_i .

Se se indica con l_i lo scarto relativo al numero delle quantità

x_i che si presentano nel gruppo G' , si estendono a questo caso tutte le formule del numero precedente, sostituendo a

$$n_i \quad \frac{1}{2} (n_{i-1} + n_i) \quad \text{e a} \quad l_i \quad \frac{1}{2} (l_{i-1} + l_i).$$

Infatti, per la proprietà addittiva del valore medio è

$$M \left[\left(L_i - \frac{l_i}{2} \right)^2 \right] = M (L_i^2) - M (L_i l_i) + \frac{1}{4} M (l_i^2).$$

Si osservi che $-L_i$ è lo scarto relativo al numero delle quantità maggiori di R , pertanto $M [L_i l_i] = -M [(-L_i) l_i] = \frac{n_i (N_i - n_i)}{N_0}$ se supponiamo, come d'ordinario, N_0 molto piccolo di fronte a N . Pertanto :

$$\begin{aligned} M \left[\left(L_i - \frac{l_i}{2} \right)^2 \right] &= \frac{N_i (N_0 - N_i)}{N_0} - \frac{n_i (N_0 - N_i)}{N_0} + \frac{1}{4} \frac{n_i (N_0 - n_i)}{N_0} = \\ &= \frac{\left(N_i - \frac{n_i}{2} \right) \left[N_0 - N_i + \frac{n_i}{2} \right]}{N_0} - \frac{n_i N_i}{2 N_0} + \\ &+ \frac{n_i (N_0 - N_i)}{2 N_0} + \frac{n_i^2}{4 N_0} - \frac{n_i (N_0 - N_i)}{N_0} + \frac{1}{4} \frac{n_i (N_0 - n_i)}{N_0} \\ &= \frac{\left(N_i - \frac{n_i}{2} \right) \left[N_0 - \left(N_i - \frac{n_i}{2} \right) \right]}{N_0} + \frac{1}{N_0} \left[\frac{n_i}{2} - n_i + \frac{1}{4} n_i \right]. \end{aligned}$$

Se si pone $n' = \frac{1}{2} (n_i + n_{i-1})$ risulta

$$N' = \sum_i n'_i = \frac{1}{2} (N_i + N_{i-1}) = N_{i-1} + \frac{n_i}{2} = N_i - \frac{n_i}{2}$$

posto anche $l'_i = \frac{1}{2} (l_i + l_{i-1})$, $L'_i = L_i - \frac{l_i}{2}$ risulta

$$M \left[\left(L_i - \frac{l_i}{2} \right)^2 \right] = M [L_i'^2] = \frac{N'_i (N_0 - N'_i)}{N_0} - \frac{n_i}{4 N_0}. \quad [34]$$

« Quando R coincida con una delle quantità del gruppo interviene una riduzione nel quadrato dello scarto quadratico medio della probabilità di transvariazione, proporzionale a un quarto della probabilità della quantità R nel gruppo stesso ».

Per lo scarto quadratico medio σ si ottiene la formula

$$\sigma = \frac{2}{N_0} \sqrt{\frac{N_i (N_0 - N_i)}{N_0} - \frac{n_i}{4 N_0}} \quad [35]$$

che non differisce sensibilmente dalla [33].

B) Tra due gruppi.

12. — Siano i gruppi, G composto di N quantità, delle quali n_1 presentano il valore x_1 , n_2 il valore x_2 , ... n_r il valore x_r , e Γ , composto di N quantità, delle quali v_1 presentano il valore ξ_1 , di v_2 il valore ξ_2 , ... v_p il valore ξ_p .

Supponiamo per semplicità che le quantità x siano tutte distinte dalle ξ . Potremo in questo caso, includendo nei due gruppi opportune quantità x e ξ cui corrisponderanno frequenze n e v nulle, anche supporre che, ordinate sulla retta le quantità dei due gruppi, tra due quantità successive dell'uno esista sempre una ed una sola quantità dell'altro.

Indichiamo con X la mediana di G e con X quella di Γ , e sia $X < X$.

Con la inclusione nei due gruppi di quantità presentanti frequenze nulle, potremo sempre supporre che $r = p$, e che per ogni valore $< r$ dell'indice i accada che:

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i \quad \text{e quindi} \quad \xi_i < x_i < \xi_{i+1}.$$

Le quantità ξ_r e x_r risultano le quantità estreme dei due gruppi, x_1 e ξ_r gli estremi del campo di transvariazione.

Ciò premesso, la probabilità di transvariazione tra i due gruppi, rispetto alla mediana, è espressa dalla

$$P_{G\Gamma} = \frac{2 \sum_i v_i \sum_j^r n_j}{N N} = \frac{2 \sum_i n_i \sum_j^i v_j}{N N} \quad [36]$$

Posto

$$\sum_i n_j = N_i \quad \sum_j^i v_j = N_i$$

le precedenti diventano:

$$P_{G \Gamma} = \frac{2 \sum v_i N_i}{N N} = \frac{2 \sum n_i N_i}{N N} \quad [37]$$

13. — Consideriamo ora i due gruppi G' e Γ' di N_0 quantità il primo, delle quali $\frac{N_0}{N} n_i + l_i$ presentano il valore di x_i , $\frac{N_0}{N} n_2 + l_2$ il valore $x_2, \dots, \frac{N_0}{N} n_r + l_r$ il valore x_r ; e di N_0 quantità il secondo, delle quali $\frac{N_0}{N} v_i + \lambda_i$ presentano il valore ξ_i , $\frac{N_0}{N} v_2 + \lambda_2$ il valore $\xi_2, \dots, \frac{N_0}{N} v_r + \lambda_r$ il valore ξ_r .

Indichiamo con X' e con X' la mediana dei gruppi G' e Γ' . Potranno verificarsi tre casi:

$$a) \quad X' < X' \quad b) \quad X' > X' \quad c) \quad X' \equiv X'$$

Corrispondentemente la probabilità di transvariazione tra G' e Γ' è data dalla

$$P'_{G' \Gamma'} = \frac{2 \sum \left(\frac{N_0}{N} v_i + \lambda_i \right) \sum_i \left(\frac{N_0}{N} n_j + l_j \right)}{N_0 N_0} \quad [38] \text{ nella ipotesi } a)$$

$$P'_{G' \Gamma'} = \frac{2 \sum \left(\frac{N_0}{N} v_i + \lambda_i \right) \sum_i \left(\frac{N_0}{N} n_j + l_j \right)}{N_0 N_0} = 2 - P'_{G' \Gamma'} \quad [39] \text{ nella ipotesi } b)$$

e nella ipotesi c), che s'intende verificata quando, essendo $x_{h-1} < X < x_h$, X' appartiene ad uno dei due intervalli $\xi_{h-1} \dots \xi_h$, $\xi_h \dots \xi_{h+1}$, indifferentemente da una all'altra delle due formule, le quali diventano equivalenti.

Lo scarto ε è nella ipotesi a)

$$\varepsilon' = P'_{G \Gamma} - P_{G \Gamma} = \frac{2 \sum \lambda_i \sum_i \left(\frac{N_0}{N} n_j + l_j \right) + 2 \sum \frac{N_0}{N} v_i \sum_i l_j}{N_0 N_0} \quad [40]$$

e nella ipotesi b) :

$$\varepsilon'' = P''_{G\Gamma} - P_{G\Gamma} = \frac{2 \sum \lambda_i \sum_i \left(\frac{N_o}{N} n_j + l_j \right) + 2 \sum \frac{N_o}{N} v_i \sum_i l_j}{N_o N_o}$$

Relativamente, però, ai gruppi totali G e Γ sono le [38] e [40] che definiscono, rispettivamente, la probabilità di transvariazione e il suo scarto dal valore effettivo, in tutti i casi (11).

Posto pertanto: $\sum_i l_j = L_i$ assumere per ε la espressione :

$$\varepsilon = \frac{2}{N_o N_o} \left\{ \frac{N_o}{N} \sum_i N_i \lambda_i + \sum \lambda_i L_i + \frac{N_o}{N} \sum v_i L_i \right\} \quad [41]$$

da cui, tenuto presente che $\sum v_i L_i = \sum N_i l_i$ essendo $\sum_i v_i = N_i$

$$\begin{aligned} \frac{N_o^2 N_o^2}{4} \varepsilon^2 &= \frac{N_o^2}{N^2} \sum_{ij} N_i N_j \lambda_i \lambda_j + \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j L_i L_j + \frac{N_o^2}{N^2} \sum_{ij} N_i N_j l_i l_j \\ &+ \frac{2 N_o}{N} \sum_{ij} N_i L_j \lambda_i \lambda_j + \frac{2 N_o}{N} \sum_{ij} N_j \lambda_i L_i l_j + 2 \frac{N_o N_o}{N N} \sum_{ij} N_i N_j l_i l_j \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{N_o^2 N_o^2}{4} M(\varepsilon^2) &= \sum_{ij} \left\{ \frac{N_o^2}{N^2} N_i N_j M(\lambda_i \lambda_j) + M(\lambda_i \lambda_j) M(L_i L_j) + \frac{N_o^2}{N^2} N_i N_j M(l_i l_j) + \right. \\ &+ \frac{2 N_o}{N} N_i M(L_j) M(\lambda_i \lambda_j) + \frac{2 N_o}{N} N_j M(\lambda_i) M(L_i l_j) + \\ &\left. + \frac{2 N_o N_o}{N N} N_i N_j M(\lambda_i) M(l_j) \right\} \end{aligned}$$

(11) Considerazioni uguali a quelle fatte nel caso di un gruppo e una quantità potrebbero ripetersi, in questo, sulla convenienza di assumere, nella ipotesi $X < X$, per la probabilità di transvariazione, il valore $P''_{G\Gamma}$ invece di $P'_{G\Gamma}$ quando, essendosi constatata inversione della relazione di grandezza tra le mediane dei due campioni si possa presumere $P_{G\Gamma} < 1$ e sia $P'_{G\Gamma} > 1$ (cfr. nota (1)). È analogamente sulla conseguente riduzione dello scarto quadratico medio di tali valori rispetto al proprio valore medio (calcolato mediante tutti i valori $P_{G\Gamma}$).

e poichè $M(L_i) = M(\lambda_i) = M(l_i) = 0$ si ha

$$\frac{N_o^2 N_o^2}{4} M(\epsilon^2) = \sum_{i,j} \left\{ \frac{N_o^2}{N^2} N_i N_j M(\lambda_i \lambda_j) + M(L_i L_j) M(\lambda_i \lambda_j) + \right. \\ \left. + \frac{N_o^2}{N^2} N_i N_j M(l_i l_j) \right\}. \quad [42]$$

Si verifica immediatamente che

$$N_i N_j M(\lambda_i \lambda_j) = N_i n_j M(\lambda_i \Lambda_j) \\ M(L_i L_j) M(\lambda_i \lambda_j) = M(L_i l_j) M(\lambda_i \Lambda_j)$$

inoltre è:

$$M(L_i l_j) = \frac{N_o(N - N_o)}{N^2} \frac{1}{N} \begin{cases} -N_i n_j & i > j \\ n_i(N - n_i) - N_{i+1} n_i = n_i(N - n_i) & i = j \\ n_j(N - n_i) & i < j \end{cases}$$

quindi

$$\sum_{i,j} M(L_i L_j) M(\lambda_i \lambda_j) = \frac{N_o(N - N_o)}{N^2} \left\{ -\frac{\sum_i \sum_j n_j N_i M(\lambda_i \Lambda_j)}{N} + \right. \\ \left. + \sum_i \sum_j n_j M(\lambda_i \Lambda_j) \right\}$$

mentre

$$\frac{N_o^2}{N^2} \sum_{i,j} N_i N_j M(\lambda_i \lambda_j) = \frac{N_o^2}{N^2} \sum_{i,j} N_i n_j M(\lambda_i \Lambda_j).$$

Se con n_i indichiamo le ordinate della curva di distribuzione del gruppo G , ragguagliato a N_o il numero dei casi nei quali esso si manifesta, le due formule diventano:

$$\sum_{i,j} M(L_i L_j) M(\lambda_i \lambda_j) = (1 - p) \left\{ -\frac{1}{N_o} \sum_{i,j} n_j N_i M(\lambda_i \Lambda_j) + \right. \\ \left. + \sum_i \sum_j n_j M(\lambda_i \Lambda_j) \right\} \quad [43]$$

$$\frac{N_o^2}{N^2} \sum_{i,j} N_i N_j M(\lambda_i \lambda_j) = \sum_{i,j} N_i n_j M(\lambda_i \Lambda_j). \quad [44]$$

A parte il coefficiente $1 - p$, il secondo membro della [43] è la somma di due termini, il primo dei quali è, in valore assoluto, uguale

al secondo membro della [44] diviso per N_0 . Per apprezzare il valore del secondo paragoniamolo a $\sum_i N_i \sum_j^r n_j M(\lambda_i \Lambda_j)$.

Si osservi che per

$$j > i \text{ è } M(\lambda_i \Lambda_j) = \frac{N_0 (N - N_0)}{N^2} \frac{v_i (N - v_i)}{N}$$

e quindi $M(\lambda_i \Lambda_j) > 0$. Pertanto, posto $\sum_j^r n_j M(\lambda_i \Lambda_j) = \Phi(i)$.

$\Phi(i)$ risulta una funzione positiva dell'indice i , la quale in ogni punto a sinistra della mediana del gruppo Γ assume valore maggiore che non nel corrispondente punto di destra.

$$\text{Posto } \bar{N} = \frac{\sum N_i \Phi(i)}{\sum \Phi(i)} \quad \text{e} \quad k_i = \frac{\Phi(i)}{\sum \Phi(i)}$$

risulta $\bar{N} = k_1 N_1 + k_2 N_2 + \dots + k_r N_r$ essendo $\sum k_i = 1$

poichè $k_1 + k_2 + \dots + k_h > \frac{1}{2}$ e $N_1 > N_2 > \dots > N_h > \frac{N_0}{2}$, $h = \frac{r}{2}$

per r pari e $h = \frac{r+1}{2}$

per r dispari, si deduce subito che $\bar{N} > \frac{1}{4} N_0$,

e quindi $\sum_{ij} M(l_i l_j) M(\lambda_i \lambda_j) < \frac{3}{N_0} \sum_{ij} N_i N_j M(\lambda_i \lambda_j)$ con largo margine.

Analogamente si trova che

$$\sum_{ij} M(L_i L_j) M(\lambda_i \lambda_j) < \frac{3}{N_0} \sum_{ij} N_i N_j M(l_i l_j).$$

Da ciò segue che:

$$\sum_{ij} M(L_i L_j) M(\lambda_i \lambda_j) < \frac{1,5}{N_0} \{ \sum_{ij} N_i N_j M(\lambda_i \lambda_j) + \sum N_i N_j M(l_i l_j) \}$$

se N_0 è il minore tra i due numeri N_0 e N_0 .

Trascureremo pertanto nella espressione di $M(\varepsilon^2)$ la somma $\sum_{ij} M(L_i L_j) M(\lambda_i \lambda_j)$.

L'errore relativo che si commette nella valutazione dello scarto quadratico risulta affatto trascurabile. Infatti posto

$$M(\varepsilon^2) = x^2 + \frac{k}{N_0} x^2 = (x + z)^2 \quad \text{si ha}$$

$$2zx + z^2 = \frac{k}{N_0} x^2 \quad \text{da cui} \quad z < \frac{k}{2N_0} x. \quad \text{È certo } k < 1,5.$$

Ciò significa che normalmente l'errore è molto piccolo, anche se N_0 non è grande.

Avremo dunque

$$\frac{N_0^2 N_0^2}{4} M(\varepsilon^2) = \sum_{ij} \left\{ \frac{N_0^2}{N^2} N_i N_j M(\lambda_i \lambda_j) + \frac{N_0^2}{N^2} N_i N_j M(l_i l_j) \right\} \quad [45]$$

Siccome

$$M(l_i l_j) = \frac{N_0(N - N_0)}{N^3} \begin{cases} -n_i n_j \\ n_i(N - n_i) \end{cases}$$

$$M(\lambda_i \lambda_j) = \frac{N_0(N - N_0)}{N^3} \begin{cases} -v_i v_j \\ v_i(N - v_i) \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{N_0^2 N_0^2}{4} M(\varepsilon^2) &= \frac{N_0^2 N_0(N - N_0)}{N^2 N^3} \{ N \sum n_i N_i^2 - (\sum n_i N_i)^2 \} \\ &+ \frac{N_0^2 N_0(N - N_0)}{N^2 N^3} \{ N \sum v_i N_i^2 - (\sum v_i N_i)^2 \} \quad [46] \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} M(\varepsilon^2) &= \frac{4}{N_0} \frac{N - N_0}{N} \left\{ \frac{\sum v_i N_i^2}{N^2 N} - \frac{(\sum v_i N_i)^2}{N^2 N^2} \right\} \\ &+ \frac{4}{N_0} \frac{N - N_0}{N} \left\{ \frac{\sum n_i N_i^2}{N N^2} - \frac{(\sum n_i N_i)^2}{N^2 N^2} \right\} \end{aligned}$$

e poichè $\sum v_i N_i = \sum n_i N_i$:

$$\begin{aligned} M(\varepsilon^2) &= \frac{4}{N_0} \frac{N - N_0}{N} \frac{\sum v_i N_i^2}{N^2 N} + \frac{4}{N_0} \frac{N - N_0}{N} \frac{\sum n_i N_i^2}{N N^2} - \\ &- \left[\frac{4}{N_0} \frac{N - N_0}{N} + \frac{4}{N_0} \frac{N - N_0}{N} \right] \left(\frac{\sum v_i N_i}{N N} \right)^2. \end{aligned}$$

Per N_0 e N_0 trascurabili rispetto a N e N e ridotto a N_0 e N_0 il numero dei casi possibili, risulta:

$$M(\varepsilon^2) = \frac{4}{N_0^2 N_0^2} \left\{ \sum v_i N_i^2 + \sum n_i N_i^2 - \frac{N_0 + N_0}{N_0 N_0} (\sum v_i N_i)^2 \right\}. \quad [47]$$

14. — Consideriamo ora il caso in cui le quantità x coincidano con le quantità ξ . La [39] diventa :

$$P'_{G\Gamma} = \frac{2 \sum \left(\frac{N_o}{N} v_i + \lambda_i \right) \left\{ \left(\sum_i \frac{N_o}{N} n_j + l_j \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{N_o}{N} n_i + l_i \right) \right\}}{N_o N_o}$$

Se si pone anche qui $n'_i = \frac{1}{2} (n_{i+1} + n_i)$, $l'_i = \frac{1}{2} (l_{i+1} + l_i)$

o, ciò che è lo stesso, $\bar{v}_i = \frac{1}{2} (v_{i-1} + v_i)$, $\bar{\lambda}_i = \frac{1}{2} (\lambda_{i-1} + \lambda_i)$ la precedente coincide con la [38], nella quale si sostituiscono al posto di n_i e l_i i valori definiti di n'_i e l'_i , oppure \bar{v}_i e $\bar{\lambda}_i$ al posto di v_i e λ_i .

Si stabiliscono pertanto anche in questo caso la [43] e la [46], solo che al posto di $M(l_i l_j)$ compare $M(l'_i l'_j)$, oppure $M(\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_j)$ al posto di $M(\lambda_i, \lambda_j)$.

Ora è :

$$\begin{aligned} M(\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j) &= M \left[\frac{\lambda_{i-1} + \lambda_i}{2} \frac{\lambda_{j-1} + \lambda_j}{2} \right] = \frac{1}{4} M(\lambda_{i-1} \lambda_{j-1}) + \\ &+ \frac{1}{4} M(\lambda_{i-1} \lambda_j) + \frac{1}{4} M(\lambda_i \lambda_{j-1}) + \frac{1}{4} M(\lambda_i \lambda_j) \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} M(\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j) &= -\frac{1}{4} \frac{N_o (N - N_o)}{N^3} \{ v_{i-1} v_{j-1} + v_{i-1} v_j + v_i v_{j-1} + v_i v_j \} = \\ &= -\frac{N_o (N - N_o)}{N^3} \frac{v_{i-1} + v_i}{2} \frac{v_{j-1} + v_j}{2} \text{ per } i \neq j, j-1, j+1 \\ &= -\frac{1}{4} \frac{N_o (N - N_o)}{N^3} \{ v_{i-1} (N - v_{i-1}) + v_i (N - v_i) - 2 v_i v_{j-1} \} = \\ &= -\frac{N_o (N - N_o)}{N^3} \left\{ \frac{v_{i-1} + v_i}{2} \left(N - \frac{v_{i-1} + v_i}{2} \right) - N \frac{v_{i-1} + v_i}{4} \right\} \text{ per } i = j \\ &= -\frac{1}{4} \frac{N_o (N - N_o)}{N^3} \{ -v_{i-1} v_{j-1} - v_i v_j - v_{i-1} v_j + v_i (N - v_{j-1}) \} = \\ &= -\frac{N_o (N - N_o)}{N^3} \left\{ \frac{v_{i-1} + v_i}{2} \frac{v_{j-1} + v_j}{2} - \frac{N v_i}{4} \right\} \text{ per } i = j-1 \\ &= -\frac{N_o (N - N_o)}{N^3} \left\{ \frac{v_{i-1} + v_i}{2} \frac{v_{j-1} + v_j}{2} - \frac{N v_{i-1}}{4} \right\} \text{ per } i = j+1 \end{aligned}$$

Sicchè

$$\begin{aligned} \Sigma_i N_i N_j M (\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j) &= \frac{N_0 (N - N_0)}{N^3} \left\{ N \Sigma \bar{v}_i N_i^2 - (\Sigma \bar{v}_i N_i)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{N}{4} [2 \Sigma \bar{v}_i N_i^2 - \Sigma v_i N_i N_{i+1} - \Sigma v_{i-1} N_i N_{i-1}] \right\} \\ &= \frac{N_0 (N - N_0)}{N^3} \left\{ N \Sigma \bar{v}_i N_i^2 - (\Sigma \bar{v}_i N_i)^2 - \frac{N}{4} \Sigma n_i^2 v_i \right\}. \end{aligned}$$

E la [47] diventa

$$\begin{aligned} M(\varepsilon^2) &= \frac{4}{N_0^2 N_0^2} \left\{ \Sigma \bar{v}_i N_i^2 + \Sigma n_i \bar{N}_i^2 - \left(\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0} \right) (\Sigma \bar{v}_i N_i)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \Sigma n_i^2 v_i \right\} \end{aligned} \quad [48]$$

ma il termine correttivo $\frac{1}{4} \Sigma n_i^2 v_i$ può ordinariamente trascurarsi.

§ 4. — SULL'ORDINE DI GRANDEZZA DELL'ERRORE DELLO SCARTO QUADRATICO MEDIO.

15. — Al variare dei gruppi di osservazione la probabilità di transvariazione varia, oscillando intorno al valore medio teorico che è il valore effettivo della probabilità di transvariazione tra i gruppi completi incogniti.

Abbiamo determinato nel paragrafo precedente l'ordine di grandezza degli scostamenti, rappresentato dallo scarto quadratico medio. Ogni gruppo, se trattasi di probabilità di transvariazione tra un gruppo ed una quantità, o coppie di gruppi di osservazioni, nel caso più generale, fornisce una determinazione empirica dello scarto effettivo (12) :

(12). Occorre tener presente, in pratica, che tale determinazione empirica dello scarto quadratico medio potrà differire più o meno dal valore esatto, e a volte anche moltissimo, specie quando occorra un numero molto ristretto di osservazioni, sì che si potrebbe essere indotti a conclusioni tutt'affatto fallaci. Per fare un esempio semplice, poniamoci nel caso della formula [32], nella ipotesi che il valore osservato di $P_{GR} = 0$. È certo che, in mancanza di altre informazioni $M(\varepsilon^2) = 0$ non autorizza affatto a ritenere nullo l'intervallo a destra dello zero entro il quale il numero delle osservazioni assicura essere praticamente certo che cada il valore effettivo di P_{GR} , ma dice solo che può non essere (e in genere è) affatto lecita la sostituzione delle frequenze empiriche osservate a quelle reali incognite.

Non riteniamo utile insietere qui più a lungo su casi che non possono trarre in inganno lo statistico esperto. Cfr. ad es., e per maggiori ragguagli,

qual'è il comportamento di questa nuova variabile casuale al variare dei gruppi di osservazione? Si osservi (formule [32] e [47]), che essa non è una funzione lineare degli scarti l e λ e il suo valore medio teorico differisce dal valore effettivo, incognito, fornito dalle frequenze dei due universi; essa oscilla pertanto intorno a un valore che può essere più o meno distante da questo: ci proponiamo ora di determinare l'ordine di grandezza dei valori degli scostamenti dal valore effettivo dello scarto.

$$\text{Poniamo} \quad \sigma^2 = M(\varepsilon^2) \quad \sigma'^2 = M'(\varepsilon^2)$$

indicando con σ' i valori empirici risultanti dai gruppi osservati, dello scarto teorico σ .

Sia σ_0 il valore medio dello scarto $\sigma'^2 - \sigma^2$, sicchè, posto $\sigma_1^2 = \sigma'^2 - \sigma_0$ risulta $M(\sigma_1^2) = \sigma^2$. Indicando con τ lo scarto quadratico di σ_1^2 rispetto al proprio valore medio: $\tau^2 = M[(\sigma_1^2 - \sigma^2)^2]$ si può porre $\sigma_1^2 - \sigma^2 = k\tau$, k essendo un numero reale di modulo inferiore a 4 con ogni probabilità.

Lo scarto $\eta = \sigma_1 - \sigma$ soddisfa quindi alla equazione:

$$\eta^2 = k\tau - 2\sigma(\sigma_1 - \sigma) \quad \text{cioè} \quad \eta^2 + 2\sigma\eta - k\tau = 0$$

delle due soluzioni di questa solo la $\eta = -\sigma + \sqrt{\sigma^2 + k\tau}$, che per $k=0$ dà $\eta=0$, dà il valore cercato di η . L'altra soluzione $\eta = -\sigma - \sqrt{\sigma^2 + k\tau}$ si scarta con la semplice considerazione che σ_1 è una variabile positiva e quindi lo scarto $\eta > -\sigma$.

Si noti che se per $k=\alpha$ ($\alpha > 0$), η assume il valore $\eta_\alpha > 0$, per $k=-\alpha$, η assume il valore $\eta_{-\alpha}$ tale che $|\eta_{-\alpha}| > \eta_\alpha$. Pertanto se una certa percentuale degli errori $\sigma_1^2 - \sigma^2$ è, in valore assoluto, inferiore a $\alpha\tau$, la stessa percentuale degli errori η è compresa tra gli estremi $\eta_{-\alpha}$ e η_α , e una percentuale maggiore tra gli estremi $\eta_{-\alpha}$ e $-\eta_{-\alpha}$. Quindi possiamo concludere che

$$|\eta| < \sigma - \sqrt{\sigma^2 - \alpha\tau} \quad [50]$$

con probabilità certamente maggiore di $1 - \frac{1}{\alpha^2}$, cioè, « assunto come valore dello scarto $\sigma_1 = \sqrt{\sigma'^2 - \sigma_0}$ l'ordine di grandezza dello scarto $\eta = \sigma_1 - \sigma$ è $\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \alpha\tau}$ ».

le chiare considerazioni metodologiche del Gini nel lavoro *Sulle vaccinazioni antitifiche nell'esercito italiano durante la guerra* (C. GINI e L. DE BERNARDINIS, «Metron» Vol. III, n° 3-4, 1924, pagg. 380-386).

Nei due numeri seguenti procederemo alla valutazione di η distintamente nei due casi: A) di una quantità e di un gruppo; B) di due gruppi.

È opportuno osservare qui, a giustificazione del metodo da me seguito per questa valutazione, che all'errore che si commette, sostituendo nel 2° membro della [50], nelle espressioni di σ e di τ , le frequenze empiriche osservate in luogo delle effettive, un altro se ne aggiunge dovuto al fatto che i valori medi del prodotto di più scarti (formule pag. 17) da me calcolati in base alla espressione [13] della legge di probabilità dei campioni di una data totalità divergono da quelli che risulterebbero dalla legge esatta [11], e sempre più, notevolmente, al crescere del numero degli scarti. Non giova, a mio parere, ammettere la ipotesi della validità della legge gaussiana [13], solo per rendere teoricamente esatte delle formule che in pratica non solo tali.

Ammesse queste due principali cause di errore inerenti a ragioni di carattere teorico, è evidente che anche un calcolo esatto non porterebbe che alla valutazione dell'ordine di grandezza del 2° membro della [50]. All'incontro esso complicherebbe la già non semplice espressione della [67] e renderebbe eccessivamente laboriose le applicazioni della [50]. Ciò giustifica il procedimento adottato nel paragrafo seguente, che semplifica alquanto la formula finale, senza esorbitare dai limiti plausibili di approssimazione consentiti dalla speciale natura della questione.

Ho giudicato utile questa ricerca, fatte pure le dovute riserve per le incertezze cui ho accennato, poichè essa è trascurata in genere dagli Autori.

Anche un saggio di tale natura non può essere del tutto privo d'interesse.

A) *Tra un gruppo e una quantità.*

16. — Poniamo

$$\begin{aligned}\tau^2 &= M \left[\{ \sigma'^2 - \sigma^2 - \sigma_0 \}^2 \right] = M \left[\{ \sigma'^2 - \sigma^2 \} - \sigma_0 \right]^2 = \\ &= M \left[(\sigma'^2 - \sigma^2)^2 \right] - 2 \sigma_0 M \left[\sigma'^2 - \sigma^2 \right] + \sigma_0^2 = M \left[(\sigma'^2 - \sigma^2)^2 \right] - \sigma_0^2.\end{aligned}$$

Dalla [33] segue:

$$\begin{aligned}\sigma'^2 - \sigma^2 &= \frac{4}{N_0^3} \{ (N_i + L_i) [N_0 - (N_i + L_i)] - N_i (N_0 - N_i) \} = \\ &= \frac{4}{N_0^3} \{ (N_0 - 2 N_i) L_i - L_i^2 \}, \quad \text{per cui}\end{aligned}$$

$$\sigma_0 = M (\sigma'^2 - \sigma^2) = -\frac{4}{N_0^4} N_i (N_0 - N_i) = -\frac{\sigma^2}{N_0}.$$

Poichè

$$(\sigma'^2 - \sigma^2)^2 = \frac{16}{N_0^6} \{ (N_0 - 2 N_i)^2 L_i^2 + L_i^4 - 2 (N_0 - 2 N_i) L_i^3 \} \text{ si ha :}$$

$$M[(\sigma'^2 - \sigma^2)^2] = \frac{16}{N_0^6} \left\{ (N_0 - 2 N_i)^2 \frac{N_i (N_0 - N_i)}{N_0} + \frac{3 N_i^2 (N_0 - N_i)^2}{N_0^2} \right\}.$$

Inoltre

$$\frac{\sigma^4}{N_0^2} = \frac{16 N_i^2 (N_0 - N_i)^2}{N_0^8}, \text{ e}$$

pertanto

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{16}{N_0^6} \left\{ (N_0 - 2 N_i)^2 \frac{N_i (N_0 - N_i)}{N_0} + \frac{2 N_i^2 (N_0 - N_i)^2}{N_0^2} \right\} = \\ &= \frac{16}{N_0^2} N_i (N_0 - N_i) \left\{ (N_0 - 2 N_i)^2 + \frac{2 N_i (N_0 - N_i)}{N_0} \right\} = \\ &= \frac{4 \sigma^2}{N_0^4} \left\{ (N_0 - 2 N_i)^2 + \frac{2 N_i (N_0 - N_i)}{N_0} \right\} = \\ &= \frac{4 \sigma^4}{N_0^2} \left\{ \frac{(1 - P_{GR})^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Da questa si ottiene

$$\sqrt{\sigma^2 - \alpha \tau} = \sigma \sqrt{1 - \frac{2 \alpha}{N_0} \sqrt{\left(\frac{1 - P_{GR}}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{2}}} \quad \text{e quindi}$$

$$\eta < \sigma - \sqrt{\sigma^2 - \alpha \tau} = \sigma \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{2 \alpha}{N_0} \sqrt{\left(\frac{1 - P_{GR}}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{2}}} \right\} \quad [51]$$

Se si sviluppano successivamente in serie di potenze i due radicali, trascurando i termini dello sviluppo, successivi al 2°, e si commettono

così due errori successivi di segno contrario, che si compensano, in parte, possiamo dire che : « Se si assume come valore dello scarto quadratico medio il valore corretto $\sigma_1 = \sigma \sqrt{\frac{N_0}{N_0 - 1}}$ (13) l'errore

(13) Cfr. J. F. STEFFENSEN : *Some recent researches in the theory of statistics and actuarial science.* — Cambridge University Press, 1930 — First Lecture. Non si può non essere d'accordo con l'A. sulla critica a questa formula Gaussiana, e in generale, alle sue formule [39] e [54] che danno i "Thiele's o Tschuprow's presumptive values". Ma, beninteso, come formule atte a fornire i valori presunti delle costanti \bar{m} ciò che non significa che "the time-honoured Gaussian

formule $\bar{m} = \frac{n}{n-1} m_2$ " per limitarci a questa, non abbia un proprio preciso significato che ne renda corretta e necessaria l'applicazione appunto in questa tormentata questione del valore presunto delle costanti statistiche. Infatti poichè il valore teorico medio, $E(m_2)$ dello scarto quadratico medio, calcolato mediante n osservazioni differisce dal valore medio \bar{m}_2 della costante, lo scostamento $m_2 - \bar{m}_2$ del valore fornito da una sola serie di osservazioni, dal valore vero, consta, al variare delle serie, di una parte costante $E(m_2) - \bar{m}_2 = \frac{\bar{m}_2}{n}$, e di una parte variabile, dovuta al caso, $m_2 - E(m_2)$.

Per correggere quindi la parte sistematica di tale errore occorre assumere come valore dello scarto quadratico medio non m_2 , ma $m_2 + \frac{\bar{m}_2}{n}$, \bar{m}_2 è incognito, è però $\bar{m}_2 = \frac{n}{n-1} E(m_2)$, e poichè il valore più probabile $E(m_2)$ è precisamente m_2 , ponendo : $m'_2 = m_2 + \frac{1}{n-1} m_2 = \frac{n}{n-1} m_2$, m'_2 rappresenta il valore più probabile di \bar{m}_2 .

Niente vieta di chiamare m'_2 valore presunto di \bar{m}_2 . Ma ciò che è interessante soprattutto notare è che questa denominazione non deve dar luogo ad equivoci : data una serie di osservazioni, come valore presunto X' di una costante X , di valore effettivo incognito X s'intende il valore più probabile che risulta per \bar{X} dalla serie data. Al variare di questa X' varia assumendo valori X'_1, X'_2, \dots, X'_m che si possono riguardare come determinazioni empiriche di una variabile casuale, così come i valori X_1, X_2, \dots, X_m della X . Niente autorizza a porre $X' = \bar{X}$ più che $X = \bar{X}$.

Restituito così il proprio valore alla formula di Gauss, cadono da sè tutte le obiezioni dello Steffensen, che si risolvono nella critica all'uso improprio di una relazione manifestamente errata ($X' = X$) ; meno quella esposta al n. 9 (pagg. 14-15) che si riconnette alla questione della compatibilità delle costanti di frequenza. Infatti i valori più probabili delle costanti non sono sempre compatibili : così per es. σ_2 , (per $\bar{\sigma}_2$), σ_1 (per $\bar{\sigma}_1$) e $\frac{n}{n-1} m_2$ (per \bar{m}_2), come nota l'A. Cioè non può esistere nessuna massa reale di osservazioni per la quale coe-

probabile che si commette non è presumibilmente maggiore di

$$\frac{\sigma \sqrt{2}}{N_0} \left[\frac{1 - P_{GR}}{\sigma} + \frac{1}{4} \frac{\sigma}{1 - P_{GR}} \right] \quad (14) \quad [52]$$

B) *Tra due gruppi.*

17. — Si parta dalla [47]

$$\begin{aligned} \frac{N_0^2 N_0^2}{4} \sigma^2 &= \sum v_i N_i^2 + \sum n_i N_i^2 - \left(\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0} \right) (\sum v_i N_i)^2 \\ \frac{N_0^2 N_0^2}{4} \sigma'^2 &= \sum (v_i + \lambda_i) (N_i + L_i)^2 + \sum (n_i + l_i) (N_i + \Lambda_i)^2 - \\ &\quad - \left(\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0} \right) [\sum (v_i + \lambda_i) (N_i + L_i)]^2 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{N_0^2 N_0^2}{4} (\sigma'^2 - \sigma^2) &= \sum v_i (2 N_i L_i + L_i^2) + \sum \lambda_i (N_i + L_i)^2 + \\ &\quad + \sum n_i (2 N_i \Lambda_i + \Lambda_i^2) + \sum l_i (N_i + \Lambda_i)^2 - \\ &\quad - \left(\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0} \right) [\sum v_i (2 N_i + L_i) + \sum \lambda_i (N_i + L_i)] [\sum v_i L_i + \sum \lambda_i (N_i + L_i)] \end{aligned}$$

sistano i tre valori σ , σ_2 e $\frac{n}{n-1} m_2$; precisamente come $M(X)$ e $M(X^2)$ non possono rappresentare le misure del lato e dell'area di nessun quadrato. La obbiezione quindi rispecchia una impossibilità teorica non superabile da questo punto di vista. Ricorre però pur sempre la osservazione che dovendo riguardarsi m'_2 , σ_1 e σ_2 come valori approssimati di \bar{m}_2 , $\bar{\sigma}_1$ e $\bar{\sigma}_2$, ed essendo la correzione apportata a m_2 d'ordine di grandezza inferiore a quello dell'errore $m_2 - \bar{m}_2$ la $m'_2 = \sigma_2 - \sigma_1^2$ sussiste *entro i limiti di precisione* consentiti da tale scelta del valore delle costanti. Entro tali limiti anche le [42] e [44] dello Steffensen possono riguardarsi identiche, come nota lo stesso A.; però, se una è da preferire tra le due, questa è certamente la [42], perchè è vero che σ_2 e σ_1 rappresentano i valori più probabili di $\bar{\sigma}_2$ e $\bar{\sigma}_1$, ma la φ è funzione di $\sigma_2 - \bar{\sigma}_1^2$ e non è la differenza $m_2 = \sigma_2 - \sigma_1^2$, il valore più probabile di $\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1^2$, bensì

$$m'_2 = \frac{n}{n-1} m_2.$$

(14) Questa formula presenta ordinariamente una buona approssimazione rispetto alla [51] purchè $1 - P_{GR}$ non sia prossimo a σ . In tal caso le differenze tra [51] e [52] diventano relativamente notevoli e bisogna applicare la [51].

passando al valor medio :

$$\frac{N_o^2 N_o^2}{4} M [\sigma'^2 - \sigma^2] = \sum_i \{ v_i M (L_i^2) + n_i M (\Lambda_i^2) \} - \left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right) \sum_{i,j} \{ v_i v_j M (L_i L_j) + N_i N_j M (\lambda_i \lambda_j) + M (L_i L_j) M (\lambda_i \lambda_j) \}.$$

Si consideri che è

$$M (L_i L_j) M (\lambda_i \lambda_j) \begin{cases} < v_i M (L_i^2) & \text{per } i = j \\ = -\frac{1}{N_o} v_i v_j M (L_i L_j) & \text{per } i \neq j \end{cases}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \sum v_i M (L_i^2) &= \sum v_i N_i - \frac{\sum v_i N_i^2}{N_o} \sum n_i M (\Lambda_i^2) = \sum n_i N_i - \frac{\sum n_i N_i^2}{N_o} \\ N_i N_j M (\lambda_i \lambda_j) &\begin{cases} = v_i N_i^2 - \frac{v_i^2 N_i^2}{N_o} & \text{per } i = j \\ = -\frac{v_i v_j N_i N_j}{N_o} & \text{per } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

quindi

$$\sum_{i,j} N_i N_j M (\lambda_i \lambda_j) = \sum v_i N_i^2 - \frac{(\sum v_i N_i)^2}{N_o} \quad e$$

$$-\left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right) \sum_{i,j} N_i N_j M (\lambda_i \lambda_j) = \left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right) \left[-\sum v_i N_i^2 + \frac{(\sum v_i N_i)^2}{N_o} \right]$$

Analogamente, poichè $\sum_{i,j} v_i v_j M (L_i L_j) = \sum_{i,j} -N_i N_j M (l_i l_j)$:

$$-\left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right) \sum_{i,j} v_i v_j M (L_i L_j) = \left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right) \left[-\sum n_i N_i^2 + \frac{(\sum n_i N_i)^2}{N_o} \right].$$

Potremo porre

$$\begin{aligned} \frac{N_o^2 N_o^2}{4} M (\sigma'^2 - \sigma^2) &= 2 \sum v_i N_i - \left[\frac{1}{N_o} + \frac{2}{N_o} \right] \sum n_i N_i^2 - \\ &- \left[\frac{1}{N_o} + \frac{2}{N_o} \right] \sum v_i N_i^2 + \left[\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right] [\sum v_i N_i]^2. \end{aligned}$$

Paragonando i termini di questa con i singoli termini della [47] si trova che σ_0 è dell'ordine di $\left(\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0}\right) \sigma^2$, dimodochè:

« il valor medio dello scarto quadratico medio della probabilità di trasvariazione differisce dal valore teorico di una quantità che tende a zero al crescere del numero delle osservazioni di entrambi i gruppi. Già per $N_0, N_0, \simeq 100$ essa è assolutamente trascurabile.

$$\text{Posto } \tau^2 = M[(\sigma'^2 - \sigma^2 - \sigma_0^2)^2] = M[(\sigma'^2 - \sigma^2)^2] - \sigma_0^4, \\ \text{perchè } M[(\sigma'^2 - \sigma^2)^2] > [M(\sigma'^2 - \sigma^2)]^2,$$

l'ordine di grandezza di σ_0^2 rispetto a $M[(\sigma'^2 - \sigma^2)^2]$ risulta non superiore a $\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0}$; porremo:

$$\tau^2 = M[(\sigma'^2 - \sigma^2)^2] \quad [53]$$

con sufficiente approssimazione.

Poniamo:

$$A = \sum v_i (2 N_i L_i + L_i^2) + \sum \lambda_i (N_i + L_i)^2$$

$$B = \sum n_i (2 N_i \Lambda_i + \Lambda_i^2) + \sum l_i (N_i + \Lambda_i)^2$$

$$C = -\left(\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0}\right) [\sum v_i (2 N_i + L_i) + \sum \lambda_i (N_i + L_i)] [\sum v_j L_j + \sum \lambda_j (N_j + L_j)]$$

in modo che risulta:

$$\frac{N_0^4 N_0^4}{16} \tau^2 = M(A^2) + M(B^2) + M(C^2) + 2 M(A B) + \\ + 2 M(A C) + 2 M(B C). \quad [54]$$

18. — Calcoliamo separatamente i vari termini:

$$a) A^2 = \sum_{ij} [v_i v_j (2 N_i L_i + L_i^2) (2 N_j L_j + L_j^2) + \lambda_i \lambda_j (N_i + L_i)^2 (N_j + L_j)^2 \\ + 2 v_i \lambda_j (2 N_i L_i + L_i^2) (N_j + L_j)^2].$$

Tenuto conto dei valori medi nulli risulta:

$$M(A^2) = \sum_{ij} [4 v_i v_j N_i N_j M(L_i L_j) + v_i v_j M(L_i^2 L_j^2) \\ + N_i^2 N_j^2 M(\lambda_i \lambda_j) + 4 N_i N_j M(\lambda_i \lambda_j) M(L_i L_j) \\ + M(\lambda_i \lambda_j) M(L_i^2 L_j^2) + 2 N_i^2 M(\lambda_i \lambda_j) M(L_j^2)]. \quad [55]$$

Indichiamo per comodità di notazione, i singoli termini della sommatoria con (1), (2) ... (6).

L'espressione generica di (2) è, indicando con i il minore dei due indici,

$$\begin{aligned} & \frac{3}{N^2} v_i v_j N_j^2 (N - N_i)^2 + \frac{1}{N} v_i v_j N_j (N_i - N_j) (N - N_i) = \\ & = \frac{3 N_j (N - N_i)}{N} v_i v_j M(L_i, L_j) + (N_i - N_j) v_i v_j M(L_i, L_j). \end{aligned}$$

Risulta che in generale, per ogni coppia di valori dei due indici j , il rapporto tra i termini (2) e (1) è uguale a:

$$\frac{3}{4} \frac{N - N_i}{N N_i} + \frac{N_i - N_j}{N_i N_j}.$$

L'espressione generica di (4) è

$$-\frac{4}{N_0} v_i v_j N_i N_j M(L_i, L_j) = -\frac{1}{N_0} (1).$$

L'espressione generica di (5) è

$$-\frac{v_i v_j}{N_0} M(L_i^2, L_j^2) = -\frac{1}{N_0} (2).$$

L'espressione generica di (6) è

$$2 N_i^2 N_j M(\lambda_i, \lambda_j) \frac{N - N_j}{N} \quad \text{e pertanto} \quad (6) = \frac{2 (N - N_j)}{N N_j} (3).$$

Porremo quindi, nei consueti limiti di approssimazione:

$$M(A^2) = \sum_{i,j} [4 v_i v_j N_i N_j M(L_i, L_j) + N_i^2 N_j^2 M(\lambda_i, \lambda_j)] \quad [56]$$

Dalla formula [16'] pag. 17, considerando gli scarti $-L_i$ al posto di L_i e $-L_j$ al posto di L_j

quando $i < j$ e quindi $L_i = L_j + l_{j-1} + \dots + l_i$

o $i > j$ e quindi $L_j = L_i + l_{i-1} + \dots + l_j$ si ha

$$M(L_i, L_j) = \frac{1}{N_0} \begin{cases} N_j (N_0 - N_i) & \text{per } i < j \\ N_i (N_0 - N_i) & \text{per } i = j \\ N_i (N_0 - N_j) & \text{per } i > j, \end{cases} \quad \text{sicchè}$$

$$\begin{aligned}
 4 \sum_{i,j} v_i v_j N_i N_j M(L_i L_j) &= \frac{4}{N_o} \left[\sum_i v_i N_i (N_o - N_i) \sum_{i+j} v_j N_j^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \sum v_i^2 N_i^3 (N_o - N_i) + \sum v_i N_i^2 \sum_i^{i-1} v_j N_j (N_o - N_i) \right] \\
 &= 8 \sum v_i N_i \sum_{i+j} v_j N_j^2 + 4 \sum v_i^2 N_i^3 - \frac{4}{N_o} (\sum v_i N_i^2)^2.
 \end{aligned}$$

Inoltre

$$\sum_{i,j} N_i^2 N_j^2 M(\lambda_i \lambda_j) = \sum v_i N_i^4 - \frac{(\sum v_i N_i^2)^2}{N_o}.$$

Pertanto

$$M(A^2) = 8 \sum v_i N_i^2 \sum_i^{i-1} v_j N_j + \sum v_i N_i^4 + 4 \sum v_i^2 N_i^3 - \left(\frac{4}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right) (\sum v_i N_i^2)^2$$

Analogamente si ricava [57]

$$M(B^2) = 8 \sum n_i N_i^2 \sum_{i+j} n_j N_j + \sum n_i N_i^4 + 4 \sum n_i^2 N_i^3 - \left(\frac{4}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right) (\sum n_i N_i^2)^2$$

[58]

$$\begin{aligned}
 b) C^2 &= \left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right)^2 \{ \sum_{i,j} [2 N_i v_i v_j L_j + v_i v_j L_i L_j + 2 N_i N_j v_j \lambda_i + \\
 &\quad + 2 N_i v_i \lambda_j L_j + 2 v_i L_i L_j \lambda_j + 2 N_i v_j \lambda_i L_j + \\
 &\quad + N_i N_j \lambda_i \lambda_j + \lambda_i \lambda_j L_i L_j + 2 N_i \lambda_j \lambda_i L_j] \}^2. \quad [59]
 \end{aligned}$$

Tenuto conto dei valori medi nulli risulta che $M(C^2)$, a parte il coefficiente $\left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right)^2$ è una sommatoria a 4 indici i, j, u, v , i cui termini sono della forma :

$$\begin{aligned}
 &N N v v v v M(L L), \quad N N N N v v M(\lambda \lambda), \quad v v v v M(L L L L), \\
 &N N N N M(\lambda \lambda \lambda \lambda), \quad M(L L L L) M(\lambda \lambda \lambda \lambda), \\
 &N N v v M(L L) M(\lambda \lambda), \quad v v M(L L L L) M(\lambda \lambda), \\
 &N N M(\lambda \lambda \lambda \lambda) M(L L).
 \end{aligned}$$

Dalle formule di pag. 17 risulta che, in generale :

$$M(L L L L) M(\lambda \lambda \lambda \lambda) = \frac{3}{N_o^2} v v v v M(L L L L)$$

$$\nu \nu \nu \nu M (L L L L) < \frac{3}{N_o} \nu \nu \nu \nu N N M (L L) , \quad \text{perchè}$$

l'espressione generica di $M (L L L L)$ è

$$\frac{3 N_i (N_j - N_i) (N_u - N_i) (N_v - N_u)}{N_o^2} (i > j > u > v)$$

$$N N N N M (\lambda \lambda \lambda \lambda) = - \frac{3}{N_o} N N N N \nu \nu M (\lambda \lambda)$$

$$N N \nu \nu M (L L) M (\lambda \lambda) = - \frac{1}{N_o} N N \nu \nu \nu \nu M (L L)$$

$$\nu \nu M (L L L L) M (\lambda \lambda) < \frac{3}{N_o^2} N N N N \nu \nu M (\lambda \lambda)$$

$$N N M (\lambda \lambda \lambda \lambda) M (L L) = \frac{3}{N_o^2} N N \nu \nu \nu \nu M (L L)$$

Pertanto, nella espressione di $M (C^2)$ ci si può limitare alla considerazione dei soli termini della forma :

$$N N \nu \nu \nu \nu M (L L) , \quad \nu \nu N N N N M (\lambda \lambda) .$$

Poniamo quindi nella [54]

$$M (C^2) = \left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right)^2 4 \left\{ (\Sigma \nu_i N_i)^2 \Sigma n_j N_j^2 + (\Sigma n_i N_i)^2 \Sigma \nu_i N_i^2 - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right) (\Sigma \nu_i N_i)^4 \right\} . \quad [60]$$

$$c) A B = \Sigma_{i,j} [\nu_i n_j (2 N_i L_i + L_i^2) (2 N_j \Lambda_j + \Lambda_j^2) + \\ + \nu_i l_j (2 N_i L_i + L_i^2) (N_j + \Lambda_j)^2 + n_i \lambda_j (2 N_i \Lambda_i + \Lambda_i^2) (N_j + L_j)^2 + \\ + \lambda_i l_j (N_i + L_i)^2 (N_j + \Lambda_j)^2] . \quad [61]$$

Tenuto conto dei valori medii nulli risulta :

$$M (A B) = \Sigma_{i,j} [\nu_i n_j M (L_i^2) M (\Lambda_j^2) + 2 N_i \nu_i N_j^2 M (L_i l_j) + \\ + 2 N_i \nu_j M (L_i l_j) M (\Lambda_j^2) + 2 N_i n_i N_j^2 M (\Lambda_i \lambda_j) + \\ + 2 N_i n_i M (\Lambda_i \lambda_j) M (L_j^2) + 4 N_i N_j M (L_i l_j) M (\Lambda_j \lambda_i)] .$$

Indichiamo i termini della sommatoria con (1), (2) ... (6) ordinatamente :

$$(3) = \frac{N_0 - N_j}{N_0 N_j} (2)$$

$$(5) = \frac{N_0 - N_j}{N_0 N_j} (4)$$

$$(6) \left\{ \begin{array}{ll} = -\frac{2}{N_0} (2) & \text{per } j < i \\ = -\frac{2}{N_0} (4) & \text{per } j > i \\ = \frac{2(N_0 - N_i)}{N_0 N_i} (4) & \text{per } j = i \left[\text{oppure } = \frac{2(N_0 - N_i)}{N_0 N_i} (2) \right] \end{array} \right.$$

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} = \frac{N_0 - N_i}{2 N_i} (3) & \text{per } j < i \\ = \frac{1}{2} (3) & \text{per } j \geq i \end{array} \right.$$

Ci ridurremo pertanto alla considerazione dei soli termini (2) e (4).

$$(2) \left\{ \begin{array}{ll} = 2 N_i v_i N_j^2 \frac{N_i n_j}{N_0} & \text{per } i > j \\ = 2 N_i v_i N_j^2 \frac{(N_0 - N_i) n_j}{N_0} & \text{per } i \leq j \end{array} \right. \quad \text{Quindi :}$$

$$2 \sum_{i,j} N_i v_i N_j^2 M(L_i, l_j) = 2 \sum_i n_i N_i N_i^2 v_i - \frac{2}{N_0} \sum_i v_i N_i^2 \sum_j n_j N_j^2 + \\ + 2 \sum_i n_i N_i^2 \sum_{j=1}^{i-1} v_j N_j^2.$$

Analogamente

$$2 \sum_{i,j} N_i n_i N_j^2 M(\Lambda_i, \lambda_j) = 2 \sum_i v_i N_i N_i^2 n_i - \frac{2}{N_0} \sum_i n_i N_i^2 \sum_j v_j N_j^2 + \\ + 2 \sum_i v_i N_i^2 \sum_{j=1}^i n_j N_j.$$

Quindi porremo :

$$2 M (A B) = 4 \sum_i n_i N_i^2 \sum_j v_j N_j + 4 \sum_i v_i N_i^2 \sum_j n_j N_j - \\ - 4 \left(\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0} \right) \sum_i v_i N_i^2 \sum_j n_j N_j^2. \quad (62)$$

$$d) \quad A C = - \left(\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0} \right) \sum_i [2 N_i v_i L_i + v_i L_i^2 + N_i^2 \lambda_i + \\ + 2 N_i \lambda_i L_i + \lambda_i L_i^2] . \\ \cdot \sum_{u,v} [2 N_u v_u v_v L_v + v_u v_v L_u L_v + 2 N_u N_v v_v \lambda_u + 2 N_u v_u \lambda_v L_v \\ + 2 v_u L_u L_v \lambda_v + 2 N_u v_v \lambda_u L_v + N_u N_v \lambda_u \lambda_v + \lambda_u \lambda_v L_u L_v + \\ + 2 N_u \lambda_u \lambda_v L_v] . \quad (63)$$

Tenuto conto dei valori medii nulli :

$$M (A C) = - \left(\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0} \right) \sum_{i,u,v} [4 N_i N_u v_i v_u M (L_i L_v) + \\ + 4 N_i N_u v_i M (L_i L_v) M (\lambda_u \lambda_v) + v_i v_u v_v M (L_i^2 L_u L_v) + \\ + N_u N_v v_i M (L_i^2) M (\lambda_u \lambda_v) + v_i M (L_i^2 L_u L_v) M (\lambda_u \lambda_v) + \\ + 2 N_i^2 N_u N_v v_v M (\lambda_i \lambda_u) + 2 N_i^2 v_u M (L_u L_v) M (\lambda_i \lambda_v) + \\ + 4 N_i N_u v_u M (\lambda_i \lambda_v) M (L_i L_v) + 4 N_i N_u v_v M (\lambda_i \lambda_u) M (L_i L_v) + \\ + 2 N_u N_v v_v M (L_i^2) M (\lambda_i \lambda_u) + 2 v_u M (L_i^2 L_u L_v) M (\lambda_i \lambda_v)] .$$

Indichiamo ordinatamente con (1), (2), ..., (11) i vari termini della sommatoria. Procedendo per confronti come si è già fatto per $M (A^2)$, $M (B^2)$ e $M (A B)$, risulta :

(2) e (3) si eliminano per confronto con (1)

(4) e (7) per confronto con (6), (5) per confronto con (3),

(8) e (9) indifferentemente per confronto con (1) con (3),

(10) per confronto con (4) e (11) per confronto con (5). Siamo ricondotti alla sola considerazione di (1) e di (6).

Sostituendo j a v risulta :

$$(1) = \frac{4}{N_0} N_i N_u v_i v_u v_j \left\{ \begin{array}{ll} N_i (N_0 - N_j) & \text{per } i > j \\ N_i (N_0 - N_i) & \text{per } i = j \\ N_j (N_0 - N_i) & \text{per } i < j. \end{array} \right.$$

Per cui

$$\begin{aligned}
 & 4 \sum_{i,j} N_i N_u v_i v_u v_j M(L_i L_j) = \\
 & - \frac{4}{N_0} \sum v_u N_u \sum v_i N_i^2 \sum v_j N_j + 4 \sum N_u v_u \sum v_i^i N_i^2 \sum_{i=1}^{i-1} v_j + \\
 & + 4 \sum v_u N_u \sum v_i^2 N_i^2 + 4 \sum v_u N_u \sum v_i N_i \sum_{i+1}^r v_j N_j = \\
 & = 4 \sum v_i N_i N_i^2 \sum v_j N_j + 4 \sum v_i N_i \sum v_i N_i \sum_{i+1}^r v_j N_j - \frac{4}{N_0} (\sum v_i N_i)^2 \sum v_j N_j^2 \\
 (6) & = \frac{2 N_i^2 N_u N_v v_v}{N_0} \begin{cases} -v_i v_u & \text{per } i \neq u \\ (N_0 - v_i) v_i & \text{per } i = u \end{cases} \quad \text{quindi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{i,u,v} N_i^2 N_u N_v v_v M(\lambda_i \lambda_u) &= 2 \sum_{i,u,v} N_i^3 N_v v_i v_v - \frac{2}{N_0} \sum_{i,u,v} N_i^2 v_i N_u v_u N_v v_v = \\
 &= 2 \sum v_i^2 N_i^3 \sum v_j N_j - \frac{2}{N_0} \sum v_i N_i^2 (\sum v_j N_j)^2
 \end{aligned}$$

si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
 2 M(A C) &= - \left(\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0} \right) \left[8 \sum v_i N_i N_i^2 \sum v_j N_j + 8 \sum v_u N_u \sum v_i N_i \sum_{i+1}^r v_j N_j - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{8}{N_0} + \frac{4}{N_0} \right) (\sum v_i N_i)^2 \sum v_j N_j^2 + 4 \sum v_i N_i^3 \sum v_j N_j \right] \quad [64]
 \end{aligned}$$

e identicamente :

$$\begin{aligned}
 2 M(B C) &= - \left(\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0} \right) \left[8 \sum n_i N_i N_i^2 \sum n_j N_j + 8 \sum n_u N_u \sum n_i N_i \sum_{i=1}^{i-1} n_j N_j - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{8}{N_0} + \frac{4}{N_0} \right) (\sum n_i N_i)^2 \sum n_j N_j^2 + 4 \sum n_i N_i^3 \sum n_j N_j \right] \quad [65]
 \end{aligned}$$

Sommando le [57], [58], [60], [62] e [65], si ottiene per la espressione

$$\begin{aligned}
 \frac{N_0^4 N_0^4}{16} \tau^2 &= 8 \sum v_i N_i^2 \sum_{i=1}^{i-1} v_j N_j + 8 \sum n_i N_i^2 \sum_{i+1}^r n_j N_j + \\
 &+ 4 \sum v_i^2 N_i^3 + 4 \sum n_i^2 N_i^3 + \sum v_i N_i^4 + \sum n_i N_i^4 - \\
 &- \left(\frac{4}{N_0} + \frac{1}{N_0} \right) (\sum v_i N_i^2)^2 - \left(\frac{4}{N_0} + \frac{1}{N_0} \right) (\sum n_i N_i^2)^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \sum n_i N_i^2 \sum v_j N_j + 4 \sum v_i N_i^2 \sum n_j N_j - 4 \left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right) \sum n_i N_i^2 \sum v_j N_j^2 - \\
& - \left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right) \left[8 \sum v_i N_i^2 N_i \sum v_j N_j + 8 \sum n_i N_i^2 N_i \sum n_j N_j + \right. \\
& + 8 \sum v_u N_u \sum_i v_i N_i \sum_{i+x} v_j N_j + 8 \sum n_u N_u \sum_i n_i N_i \sum_{i+x} n_j N_j - \\
& - 4 \left(\frac{3}{N_o} + \frac{2}{N_o} \right) (\sum v_i N_i)^2 \sum v_j N_j^2 - 4 \left(\frac{3}{N_o} + \frac{2}{N_o} \right) (\sum n_i N_i)^2 \sum n_j N_j^2 + \\
& + 4 \sum v_i N_i^3 \sum v_j N_j + 4 \sum n_i N_i^3 \sum n_j N_j + 4 \left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right)^2 (\sum v_i N_i)^4 \left. \right] \quad [66]
\end{aligned}$$

Da questa si ricava facilmente

$$\begin{aligned}
\tau^2 = \frac{16}{N_o^4 N_o^4} \left\{ 8 \sum v_i N_i^2 \sum_{i+x} v_j N_j + 8 \sum n_i N_i^2 \sum_{i+x} n_j N_j + \right. \\
+ 4 \sum n_i N_i^2 \sum v_j N_j + 4 \sum v_i N_i^2 \sum n_j N_j + \\
+ 4 \sum v_i^2 N_i^3 + 4 \sum n_i^2 N_i^3 + \sum v_i N_i^4 + \sum n_i N_i^4 - \\
- \frac{3}{N_o} (\sum v_i N_i^2)^2 - \frac{3}{N_o} (\sum n_i N_i^2)^2 - 2 \left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right) \sum v_i N_i^2 \sum n_i N_i^2 - \\
- 2 (N_o + N_o) P_{Gr} \left[2 \sum v_i N_i \sum_{i+x} v_j N_j + 2 \sum n_i N_i \sum_{i+x} n_j N_j + \right. \\
+ 2 \sum v_i N_i^2 N_i + 2 \sum n_i N_i^2 N_i + \sum v_i N_i^3 + \sum n_i N_i^3 \left. \right] + \\
+ \frac{N_o + N_o}{2} P_{Gr}^2 [(5 N_o + 3 N_o) \sum v_i N_i^2 + (5 N_o + 3 N_o) \sum n_i N_i^2] \left. \right\} - \\
- \left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right) \left[\sigma^4 + 3 \left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right)^2 P_{Gr}^4 \right]. \quad [67]
\end{aligned}$$

§ 5. — APPLICAZIONI STATISTICHE.

19. — Negli esempi che seguono fornisco varie applicazioni delle formule [32], [47] e [50]. Le formule [32] e [47] riempiono una lacuna della metodologia statistica, denotando in un certo qual modo il grado di rappresentatività dei valori dell'indice di transvariazione forniti dalle singole serie empiriche. La [50] invece, nel caso di

due gruppi di osservazioni, non risponde ad un vero interesse pratico perchè la laboriosità del calcolo è affatto sproporzionata al grado di approssimazione che essa può dare: tanto più utile mi è parso quindi darne io alcune applicazioni, che servano a dare un'idea della misura nella quale l'errore che si commette nelle determinazioni dello scarto quadratico medio aumenti il grado di incertezza della misura dell'indice, per diversi valori di questo, e al variare del numero delle osservazioni.

Per i primi due esempi ho giudicato i gruppi di osservazione abbastanza numerosi per effettuarne utilmente la interpolazione. Eseguendo il calcolo della probabilità di transvariazione e del suo scarto quadratico medio, oltre che per i gruppi graduati anche per quelli empirici, e calcolando le differenze tra i valori corrispondenti, sono riuscito a due scopi: 1° a mettere in evidenza la sensibilità di queste costanti a tali deformazioni delle leggi di distribuzione del carattere; 2° ad un qual certo controllo delle formule dimostrate, in quanto supposte eliminate, per effetto della interpolazione le cause accidentali di errori nella distribuzione dei fenomeni (e a questo precisamente tende la interpolazione) nulla vieta di considerare, per quanto, come ipotesi, sia una ipotesi affatto gratuita, le curve graduate come *universi presunti* delle curve empiriche, e queste non potrebbero certo presentare per le costanti, valori affetti da errori, rispetto ai valori forniti da quelli, di un ordine di grandezza superiore a quelli che si prevedono rispetto agli universi effettivi.

Per gli altri esempi non ho ritenuto possibile l'applicazione della [51], nè d'altra parte sarebbe stata utile. Non possibile perchè la [51] non è valida quando il numero delle osservazioni è ristretto, non essendo lecito in tal caso, trascurare, nella espressione della [53], tutti i termini che noi siamo venuti via via eliminando; non utile, in quanto già il forte valore dello scarto quadratico medio sta ad indicare, in questi, come il valore della costante fornito dai campioni sia largamente approssimativo.

20. — Ecco due seriazioni di diametri di cellule vitelline (15) di uova di bachi da seta, la seconda relativa alla razza Oro Cinese,

(15) Le cellule vitelline sono cellule che si trovano nell'uovo fecondato degli insetti, costituite da uno o più nuclei e da abbondante materiale protoplasmatico.

L'esempio è tratto dal « Bollettino dei Musei di Zoologia e Anatomia Comparata della R. Università di Genova », 1931.

dai quali si ricava :

$$\beta_1 = 0,3858, \quad \beta_2 = 3,10858, \quad k = 0,056.$$

2°) Gruppo G (1-8-31-42-26-20-5) $N = 133$.

Rispetto alla origine 21 (20-22), risulta $v_1 = 0,23308$.

Apportate le correzioni di Sheppard, per μ_2 , μ_3 e μ_4 , rispetto alla media 21,69924 si ottengono i valori :

$$\mu_2 = 1,53903, \quad \mu_3 = 0,34916, \quad \mu_4 = 5,75348,$$

dai quali si ricava :

$$\beta_1 = 0,0334, \quad \beta_2 = 2,4290, \quad k = -0,0037.$$

Assumo pertanto come funzioni interpolatrici due curve di Gauss (tipo VII di Pearson). Le equazioni sono :

$$y = 45,66 e^{-\frac{x^2}{3,5716}} \quad \text{per il gruppo } \Gamma$$

$$y = 42,80 e^{-\frac{x^2}{3,07806}} \quad \text{per il gruppo } G$$

Riporto nella seguente tabella, per ciascuno dei due gruppi, accanto ai valori delle frequenze statistiche, quelli delle frequenze graduate, che risultano dalle equazioni precedenti. Da questa si rileva anche la distribuzione di essi rispetto alla variabilità del carattere (diametro).

| Diametro | Γ | | | G | | |
|-----------------|----------|-------|-------------|-------|-------|-------------|
| | y_0 | y_c | $y_0 - y_c$ | y_0 | y_c | $y_0 - y_c$ |
| 13 | | 1 | — 1 | 1 | 2 | — 1 |
| 14-16 | | 4 | — 4 | 8 | 9 | — 1 |
| 17-19 | 20 | 15 | 5 | 31 | 26 | 5 |
| 20-22 | 40 | 34 | 6 | 42 | 42 | 0 |
| 23-25 | 46 — | 45 | — 1 | 26 | 35 | — 9 |
| 26-28 | 26 | 34 | — 8 | 20 | 15 | 5 |
| 29-31 | 14 | 15 | — 1 | 5 | 4 | 1 |
| 32-34 | 4 | 4 | 0 | | | |
| 35-37 | 3 | 1 | 2 | | | |
| | 153 | 153 | | 133 | 133 | |

Sostituite alle frequenze v_i del 1° gruppo le frequenze $v'_i = \frac{1}{2}$ ($v_{i-1} + v_i$), in base ai calcoli riportati nella tabella B (Es. N. 1, pag. 54), risultano:

$$P_{G1} = 0,676 \quad \sigma = 0,062 \quad \eta < 0,004$$

Soddisfacentemente il confronto con i valori P'_{G1} e σ' calcolati innanzi dà

$$\epsilon = 0,034 \quad \eta = 0,001$$

21. — Es. N. 2:

Ecco due seriazioni di stature, maschi e femmine, risultanti da una indagine antropologica sui genitori delle famiglie numerose di un Comune del Lazio (18).

| | | | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Stature: | 133-5 | 36-38 | 39-41 | 42-44 | 45-47 | 48-50 | 51-53 | 54-56 |
| Padri: | | | | | 4 | 10 | 13 | 22 |
| Madri: | 1 | 2 | 2 | 9 | 27 | 52 | 48 | 61 |
| | 57-59 | 60-62 | 63-65 | 66-68 | 69-71 | 72-74 | 75-77 | 78-80 |
| | 44 | 50 | 49 | 36 | 27 | 13 | 8 | 2 |
| | 61 | 30 | 20 | 5 | 2 | 2 | | |

Il primo gruppo, Γ' si compone di 278 osservazioni, il secondo, G' , di 322.

La mediana del gruppo Γ' (160-62) è alquanto inferiore alla statura media dei coscritti del Lazio (164,3 — Livi).

La probabilità di transvariazione tra Γ' e la quantità $R = 164,3$ è:

$$P_{\Gamma'R} = 2 \frac{110,5}{278} = 0,795$$

e lo scarto quadratico medio: $\sigma = 0,0587$.

Per il gruppo G' assumiamo come quantità caratteristica R l'altezza media delle giovani donne del Lazio (cm. 154 — Montessori).

(18) M. TIRELLI, *Atti del Congresso Internazionale della popolazione. Roma, 1931.*

Posto $R = 154$ si considereranno 171,5 quantità del gruppo a sinistra e 150,5 a destra di R .

Per la probabilità di transvariazione si ha il valore :

$$P_{G'R} = 0,935$$

e per lo scarto quadratico medio : $\sigma' = 0,056$.

Quindi anche per le madri di queste famiglie numerose esaminate si constata, sebbene in misura lievissima, la stessa prevalenza delle stature inferiori alla normale, che si è riscontrata nei padri.

La mediana di Γ' è maggiore di quella di G' . Sostituite alle quantità v_i le quantità : $v_i = \frac{1}{2} (v_{i-1} + v_i)$, in base ai calcoli riportati nella tabella A (Es. N. 2, pag. 53), si ricava :

$$P'_{G'\Gamma'} = 0,382 \quad \sigma' = 0,034$$

Procediamo ora alla interpolazione delle due serie, col metodo dei momenti.

1° Gruppo (4-10-13-22-44-50-49-36-27-13-8-2) $N = 278$.

Rispetto alla origine 160 (159-61) per il momento del 1° ordine risulta il valore : $v_1 = 0,57194$.

Apportate le correzioni di Sheppard, rispetto alla media 161,71582 si ottengono, per i momenti del 2°, 3° e 4° ordine i valori : $\mu_2 = 4,71545$, $\mu_3 = 2,59720$ $\mu_4 = 54,97048$.

Da questi si ricava :

$$\beta_1 = 0,06434 \quad \beta_2 = 2,47231 \quad K = -0,00727.$$

2° Gruppo G (1-2-2-9-27-52-48-61-61-30-20-5-2-2) $N = 322$.

Assumo come origine la statura 154 (153-155) : $v_1 = -0,14019$.

Rispetto alla media 153,57943 si ottengono, per i momenti corretti del 2°, 3° e 4° ordine i valori :

$$\mu_2 = 3,90637 \quad \mu_3 = -0,44080 \quad \mu_4 = 72,29601,$$

dai quali : $\beta_1 = 0,02522 \quad \beta_2 = 4,73770 \quad K = 0,000096$.

Assumo pertanto come funzioni interpolatrici due curve del tipo II di Pearson, di equazioni:

$$y = 46,70 \left(I - \frac{x^2}{45,72065} \right)^{3,29583} \quad \text{per il gruppo } \Gamma,$$

$$y = 73,25 \left(I + \frac{x^2}{21,30126} \right)^{-4,22642} \quad \text{per il gruppo } G.$$

Riporto nella seguente tabella, per ciascuno dei due gruppi, accanto alle frequenze statistiche le frequenze graduate, che risultano dalle precedenti equazioni.

| Stature | Padri | | | Madri | | |
|------------------|-------|-------|-------------|-------|-------|-------------|
| | y_0 | y_c | $y_c - y_0$ | y_0 | y_c | $y_c - y_0$ |
| 135-35 | | | | 1 | 1 | 0 |
| 36-38 | | | | 2 | 1 | — 1 |
| 39-41 | | | | 2 | 3 | 1 |
| 42-44 | | | | 9 | 8 | — 1 |
| 45-47 | 4 | 1 | — 3 | 27 | 19 | — 8 |
| 48-50 | 10 | 6 | — 4 | 52 | 39 | — 13 |
| 51-53 | 13— | 16 | 3 | 48 | 64 | 16 |
| 54-56 | 22 | 28 | 6 | 61 | 73 | 12 |
| 57-59 | 44 | 39 | — 5 | 61 | 57 | — 4 |
| 60-62 | 50 | 46 | — 4 | 30 | 32 | 2 |
| 63-65 | 49 | 46 | — 3 | 20 | 15 | — 5 |
| 66-68 | 36 | 40 | 4 | 5 | 6 | 1 |
| 69-71 | 27 | 30 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| 72-74 | 13 | 17 | 4 | 2 | 1 | — 1 |
| 75-77 | 8 | 7 | — 1 | | | |
| 78-80 | 2 | 2 | 0 | | | |
| | 278 | 278 | | 322 | 322 | |

1°) Probabilità di transvariazione tra il gruppo Γ e la quantità $R = 164,3$:

sono da considerarsi a sinistra di R 159 quantità, e a destra 119, per cui ; $P_{\Gamma R} = 0,856$;

$$\sigma = \frac{2}{278} \sqrt{\frac{159 \cdot 119}{278}} = 0,0594$$

$$|\eta| = \frac{0,059}{278} \left[\frac{0,144}{0,059} + \frac{0,059}{0,576} \right] = 0,0008 .$$

Paragonando ai valori corrispondenti $P'_{G\Gamma}$ e σ' precedentemente calcolati, si trova : $\epsilon = 0,061$ $\eta = 0,0007$.

2°) Probabilità di transvariazione tra il gruppo G e la quantità $R = 154$.

Sono da considerarsi a sinistra di R 171,5 quantità, a destra 150,5.

Si ottengono quindi da questo gruppo graduato gli stessi valori per la probabilità di transvariazione e lo scarto quadratico medio forniti dal gruppo di osservazioni :

$$P_{GR} = 0,935 \quad \sigma = 0,056.$$

La valutazione di η è : $|\eta| < 0,0004$

3°) Probabilità di transvariazione tra i gruppi graduati Γ e G :

In base ai calcoli riportati nella tabella B (Es. N. 2, pag. 74), si ricava :

$$P_{G\Gamma} = 0,358 \quad \sigma = 0,033. \quad |\eta| < 0,003 .$$

Paragonando ai valori corrispondenti $P'_{G\Gamma}$ e σ' precedentemente calcolati si trova :

$$\epsilon = 0,024 \quad \eta = 0,001 .$$

22. — Gli esempi seguenti riguardano la distribuzione delle intensità di alcuni caratteri fisici nei maschi e nelle femmine, secondo le osservazioni di vari autori e sono stati tratti dalla « Biometrica » del Boldrini, avendo il Prof. Boldrini gentilmente fornito i dati.

Riporto nella tabella seguente, per ciascuna coppia di seriazioni il numero delle osservazioni e le mediane di entrambi i gruppi, il valore della probabilità di transvariazione, dello scarto quadratico medio e del rapporto di questo a quello.

| | N. delle osservazioni | | Mediane | | $P_{G\ 1}$ | σ | $\frac{\sigma}{P_{G\ 1}}$ |
|-------------------------------|-----------------------|----|----------|------|------------|----------|---------------------------|
| | M | F | M | F | | | |
| Fegato (1) (Boldrini) | 53 | 24 | gr. 1464 | 1406 | 0.899 | 0.154 | 17 |
| Ipofisi (Schoenemann) | 55 | 37 | » 65 | 75 | 0.861 | 0.124 | 0.14 |
| Milza (1) (Boldrini) | 53 | 24 | » 200 | 151 | 0.840 | 0.136 | 16 |
| Tiroide (Shoenemann) | 44 | 25 | » 45 | 57 | 0.804 | 0.150 | 19 |
| Rene sinistro (Boldrini) . . | 53 | 25 | » 180 | 150 | 0.801 | 0.160 | 20 |
| » destro (») . . | 53 | 25 | » 170 | 150 | 0.757 | 0.146 | 19 |
| Cuore (adulti) (») . . | 53 | 25 | » 350 | 300 | 0.672 | 0.145 | 22 |
| Encefalo (») . . | 53 | 22 | » 325 | 210 | 0.596 | 0.136 | 23 |
| Polmone destro (») . . | 53 | 25 | » 650 | 525 | 0.522 | 0.112 | 21 |
| » sinistro (») . . | 53 | 25 | » 520 | 420 | 0.479 | 0.114 | 24 |

(1) Mentre le mediane di tutti gli altri gruppi sono calcolate sulle seriazioni empiriche, per quelle relative a questi due organi ho trovato conveniente raggruppare i dati in classi. Per la milza accade che le seriazioni osservate hanno la stessa mediana, e che la probabilità di transvariazione risulta < 1 considerando inferiore quella relativa ai maschi. Per il fegato accade che la mediana della seriazione relativa ai maschi è inferiore all'altra, però il valore della probabilità di transvariazione corrispondente risulta > 1 .

Esaminando i diagrammi che si ottengono raggruppando in classi i dati suddetti, e dietro l'autorità del Boldrini, che determina, nei due casi, un valore del rapporto della mediana della seriazione relativa agli organi maschili all'altra > 1 , li ho considerati due casi d'inversione delle mediane, accompagnati, nel 2°, da particolare asimmetria delle distribuzioni.

| | N. delle osservazioni | | Mediane | | $P_{G\ 1}$ | σ | $\frac{\sigma}{P_{G\ 1}}$ |
|-----------------------------------|-----------------------|----|------------------------|-------|------------|----------|---------------------------|
| | M | F | M | F | | | |
| Vol. int. tibia destra (Boldrini) | 31 | 24 | cm. ³ 38 | 34 | 0.858 | 0.153 | 18 |
| Pancreas (») | 21 | 8 | gr. 115 | 107.5 | 0.851 | 0.232 | 27 |
| Vol. int. femore destro (») | 32 | 25 | cm. ³ 56 | 53 | 0.847 | 0.155 | 18 |
| Lunghezza » » (») | 31 | 24 | mm. ³ 42.8 | 42.0 | 0.671 | 0.145 | 12 |
| Lunghezza tibia » (») | 31 | 23 | cm. 35.4 | 34.0 | 0.546 | 0.158 | 29 |
| » omero » (») | 31 | 23 | cm. 31.9 | 29.7 | 0.487 | 0.134 | 28 |
| Vol. est. tibia » (») | 33 | 24 | cm. ³ 260 | 210 | 0.384 | 0.113 | 29 |
| » » omero » (») | 32 | 23 | cm. ³ 152.5 | 110 | 0.205 | 0.052 | 25 |
| Statura (Manouvrier) | 21 | 21 | mm. 1730 | 1613 | 0.097 | 0.050 | 52 |
| Diam. biacromiale (») | 21 | 21 | mm. 420 | 370 | 0.097 | 0.059 | 61 |

Ho raggruppato questi 20 esempi in due gruppi, a seconda del maggiore o minore numero di osservazioni delle quali constano le due seriazioni, dei maschi e delle femmine. In ciascun gruppo li ho ordinati per valori decrescenti della probabilità di transvariazione.

Il confronto tra i valori dell'ultima e penultima colonna corrispondenti a valori di $P_{G\ r}$ press'a poco uguali dei due gruppi, mostra come, sia la variabilità relativa che assoluta di $P_{G\ r}$ aumentino col diminuire della numerosità dei campioni. Osservazione ovvia. Meno ovvia è però l'osservazione che i valori di σ presentano in entrambi i gruppi, una notevole cograduazione coi corrispondenti P , e una più notevole contrograduazione presenta con questi i valori di σ/P , specie se si tiene conto del fatto che alcune irregolarità nella successione dei σ e dei σ/P sono dovute alla variazione del numero delle osservazioni. Non v'ha dubbio che, questo essendo costante, la variabilità assoluta diminuisca, e quella relativa cresca, al diminuire del valore di P . Credo che non dovrebbe essere privo d'interesse uno studio approfondito della questione, con riguardo anche alla forma delle distribuzioni.

Es. N. 1: Tabella A.

| n_i | \bar{v}_i | N_i | N_i | $\bar{v}_i N_i$ | $n_i N_i$ | $\bar{v}_i N_i^2$ | $n_i N_i^2$ |
|-------|-------------|-------|-------|-----------------|-----------|-------------------|-------------|
| 31 | 10 | 124 | 10 | 1.240 | 310 | 153.760 | 3.100 |
| 42 | 30 | 93 | 40 | 2.790 | 1.680 | 259.470 | 67.200 |
| 26 | 43 | 51 | 83 | 2.193 | 2.158 | 111.843 | 179.114 |
| 20 | 36 | 25 | 119 | 900 | 2.380 | 22.500 | 283.220 |
| 5 | 20 | 5 | 139 | 100 | 695 | 500 | 96.605 |
| 133 | 153 | | | 7.223 | 7.223 | 548.073 | 629.239 |

$$N_o N_o = 20349 \quad (N_o N_o)^2 = 414081801 \quad \Sigma n_i^2 v_i = 131626$$

$$P_{Gr} = 2 \frac{7223}{20349} = 0.710$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma \bar{v}_i N_i^2 + \Sigma n_i N_i^2 - \frac{N_o + N_o}{N_o N} (\Sigma \bar{v}_i N_i)^2 - \frac{1}{4} \Sigma v_i n_i^2}{\left(\frac{N_o N_o}{2} \right)^2} =$$

$$= \frac{548.073 + 629.239 - 733.260 - 32.906}{414.081.801} = 0.0040$$

$$\sigma = 0.063.$$

Es. N. 2: Tabella A.

| n_i | \bar{v}_i | N_i | N_i | $\bar{v}_i N_i$ | $n_i N_i$ | $\bar{v}_i N_i^2$ | $n_i N_i^2$ |
|-------|-------------|-------|-------|-----------------|-----------|-------------------|-------------|
| 27 | 2 | 308 | 2 | 616 | 54 | 128,128 | 108 |
| 52 | 7 | 281 | 9 | 1,967 | 468 | 552,727 | 4,212 |
| 48 | 11,5 | 229 | 20,5 | 2.633,5 | 984 | 603.071,5 | 20.172 |
| 61 | 17,5 | 181 | 38 | 3.167,5 | 2.318 | 573.317,5 | 88.084 |
| 61 | 33 | 120 | 71 | 3.960 | 4.331 | 475.200 | 307.501 |
| 30 | 47 | 59 | 118 | 2.773 | 3.540 | 163.607 | 417.720 |
| 20 | 49,5 | 29 | 167,5 | 1.435,5 | 3.350 | 41.629,5 | 561.125 |
| 5 | 42,5 | 9 | 210 | 382,5 | 1.050 | 3.442,5 | 220.500 |
| 2 | 31,5 | 4 | 241,5 | 126 | 483 | 504 | 116.644,5 |
| 2 | 20 | 2 | 261,5 | 40 | 523 | 80 | 136.764,5 |
| 322 | 278 | | | 17.101 | 17.101 | 2.541.707 | 1.872.831 |

$$\frac{N_o N_o}{2} = 44758 \left(\frac{N_o N_o}{2} \right)^2 = 2.003.278.564 \quad \Sigma n_i^2 \bar{v}_i = 371.154$$

$$P_{Gr} = \frac{17101}{44758} = 0.382$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma \bar{v}_i N_i^2 + \Sigma n_i N_i^2 - \frac{N_o + N_o}{N_o N_o} (\Sigma \bar{v}_i N_i)^2 - \frac{1}{4} \Sigma n_i^2 v_i}{\left(\frac{N_o N_o}{2} \right)^2} =$$

$$= \frac{2.541.707 + 1.872.831 - 1.960.169 - 92.788.5}{2.003.278.564} = 0.001179$$

$$\sigma = 0.034.$$

| n_i | \bar{v}_i | N_i | N_i | $\bar{v}_i N_i$ | $n_i N_i$ | $\bar{v}_i N_i^2$ | $n_i N_i^2$ | $\sum_{i+1} \bar{v}_i N_i$ | $\bar{v}_i N_i \sum_{i+1} \bar{v}_i N_i$ | $\sum_{i+1} n_i \bar{N}_i$ | $n_i \bar{N}_i \sum_{i+1} n_i \bar{N}_i$ | $\sum_{i+1} \bar{v}_i N_i$ | $\bar{v}_i N_i^2 \sum_{i+1} \bar{v}_i N_i$ | $\sum_{i+1} n_i \bar{N}_i$ | $n_i \bar{N}_i^2 \sum_{i+1} n_i \bar{N}_i$ | $\sum_{i+1} \bar{v}_i N_i$ | $n_i \bar{N}_i^2 \sum_{i+1} \bar{v}_i N_i$ | $\sum_{i+1} n_i \bar{N}_i$ | $\bar{v}_i N_i^2 \sum_{i+1} n_i \bar{N}_i$ | $\bar{v}_i^2 N_i^3$ | $\bar{v}_i N_i^4$ | $n_i^2 N_i^3$ | $n_i N_i^4$ | $\bar{v}_i N_i^2 \bar{N}_i$ | $n_i N_i^2 N_i$ | $\bar{v}_i N_i^3$ | $n_i N_i^3$ |
|-------|-------------|-------|-------|-----------------|-----------|-------------------|-------------|----------------------------|--|----------------------------|--|----------------------------|--|----------------------------|--|----------------------------|--|----------------------------|--|---------------------|-------------------|-----------------|--------------------|-----------------------------|-----------------|-------------------|----------------|
| 2 | 0,5 | 133 | 0,5 | 66,5 | 1 | 8.844,5 | 0,5 | 6.820 | 453.530,00 | — | — | — | — | 6.885,5 | 3.442,75 | 66,5 | 33,25 | 6.886,5 | 60.907.649,25 | 588.159,25 | 156.450.360,50 | 0,50 | 0,125 | 4.422,25 | 66,5 | 1.176.318,50 | 0,25 |
| 9 | 2,5 | 131 | 3 | 327,5 | 27 | 42.902,5 | 81 | 6.492,5 | 2.126.293,75 | 1 | 27,00 | 66,5 | 2.854.346,25 | 6.858,50 | 555.538,50 | 394,0 | 1.914,00 | 6.885,5 | 295.405.163,75 | 14.050.568,75 | 722.349.392,50 | 2.187,00 | 729,00 | 128.707,50 | 10.611,00 | 5.620.227,50 | 243,00 |
| 26 | 9,5 | 122 | 12,5 | 1159 | 325 | 141.398 | 1062,5 | 5.333,5 | 6.181.526,50 | 28 | 9.100,00 | 394,0 | 55.710.812,00 | 6.533,50 | 26.542.343,75 | 1.553,0 | 6.309.062,50 | 6.858,5 | 969.778.183,00 | 163.880.282,00 | 2.104.567.832,00 | 1.320.312,50 | 634.765,625 | 1.767.475,00 | 495.625,00 | 17.250.556,00 | 49.781,25 |
| 42 | 24,5 | 96 | 37 | 2352 | 1554 | 225.792 | 51498 | 2.981,5 | 7.012.488,00 | 353 | 548.562,00 | 1.553,0 | 350.654.976,00 | 4.979,50 | 286.311.291,00 | 3.905,0 | 224.529.690,00 | 6.533,5 | 1.475.212.032,00 | 531.062.784,00 | 2.080.899.072,00 | 89.351.892,00 | 78.714.762,00 | 8.354.304,00 | 5.519.808,00 | 21.676.032,00 | 2.127.426,00 |
| 35 | 39,5 | 54 | 76,5 | 2133 | 2677,5 | 115.182 | 201828,75 | 848,5 | 1.809.850,50 | 1.907 | 5.105.992,50 | 3.905,0 | 449.785.710,00 | 2.302,00 | 471.515.782,50 | 6.038,0 | 1.236.755.992,50 | 4.979,5 | 573.548.769,00 | 245.683.206,00 | 335.870.712,00 | 548.428.978,125 | 1.198.709.052,1875 | 8.811.423,00 | 11.060.752,50 | 6.219.828,00 | 15.669.399,375 |
| 15 | 39,5 | 19 | 116 | 750,5 | 1740 | 14.259,5 | 201840 | 98 | 73.549 | 4.584,5 | 7.977.030,00 | 6.038,0 | 86.098.861,00 | 562,00 | 113.434.080,00 | 6.788,5 | 1.370.190.840,00 | 2.302,0 | 32.825.369,00 | 10.701.754,75 | 5.147.679,50 | 351.201.600,00 | 2.715.959.040,00 | 1.654.102,00 | 3.834.960,00 | 270.930,50 | 23.413.440,00 |
| 4 | 24,5 | 4 | 140,5 | 98 | 562 | 392 | 71523 | — | — | 6.324,5 | 3.554.369,00 | 6.788,5 | 2.661.092,00 | — | — | 6.886,5 | 547.635.139,50 | 562,0 | 220.304,00 | 38.416,00 | 6.272,00 | 44.691.926,00 | 1.569.803.900,75 | 55.076,00 | 318.092,00 | 1.568,00 | 11.172.681,50 |
| 133 | 153 | | | 6.886,5 | 6.886,5 | 548.766,5 | 541833 | | 17.657.238 | | 17.195.080 | | 947.765.797 | | 898.362.478 | | 3.385.422.671 | | 3.407.897.470 | 966.005.170 | 5.405.291.320 | 1.034.996.896 | 5.563.822.249 | 20.775.509 | 21.239.888,00 | 52.215.460 | 52.433.271 |

$$N_o N_o = 20.349 (N_o N_o)^2 = 414.081.801$$

$$(N_o N_o)^4 = 171.463.737.919.403.601$$

$$P_{G1} = 0,6768391$$

$$P_{G1}^2 = 0,45811117$$

$$P_{G1}^4 = 0,20986584$$

$$4 \times \sum \bar{v}_i N_i^2 = 2.195.066,0$$

$$4 \times \sum n_i \bar{N}_i^2 = 2.191.332,0$$

$$4 \times \frac{N_o + N_o}{N_o N_o} (\sum \bar{v}_i N_i)^2 = 2.666.122,0$$

$$\sum n_i^2 \bar{v}_i = \frac{133.459}{1.728.276} = 1.594.817$$

$$\sigma^2 = \frac{1.728.276}{414.081.801} = 0,004174 \quad \sigma = 0,064$$

$$\sigma_{corr.}^2 = \frac{1.594.817}{414.081.801} = 0,00385 \quad \sigma_{corr.} = 0,062$$

$$\sigma^4 = 0,000014837904$$

$$8 \sum \bar{v}_i N_i^2 \sum_{i+1} \bar{v}_i N_i = 7.582.126.378$$

$$8 \sum n_i \bar{N}_i^2 \sum_{i+1} n_i \bar{N}_i = 7.186.899.828$$

$$4 \sum \bar{v}_i N_i^2 \sum n_i \bar{N}_i = 13.631.589.880$$

$$4 \sum n_i \bar{N}_i^2 \sum \bar{v}_i N_i = 13.541.690.687$$

$$4 \sum \bar{v}_i^2 N_i^2 = 3.864.020.683$$

$$4 \sum n_i^2 \bar{N}_i^2 = 4.139.987.584$$

$$\sum \bar{v}_i N_i^2 = 5.405.291.320$$

$$\sum n_i \bar{N}_i^2 = 5.563.822.250$$

$$\frac{N_o + N_o}{2} P_{G1}^2 \{ (5 N_o + 3 N_o) \sum \bar{v}_i N_i^2 + (5 N_o + 3 N_o) \sum n_i \bar{N}_i^2 \} = 82.184.033.076$$

$$2 \frac{N_o + N_o}{N_o N_o} \sum \bar{v}_i N_i^2 \sum n_i \bar{N}_i^2 = 8.450.623.206$$

$$\frac{3}{N_o} (\sum \bar{v}_i N_i^2)^2 = 6.792.736.952$$

$$\frac{3}{N_o} (\sum n_i \bar{N}_i^2)^2 = 5.884.725.496$$

$$\frac{4 (N_o + N_o) P_{G1} (Z)}{S} = \frac{100.034.069.831}{21.937.306.201} = \frac{121.162.155.485}{21.937.306.201}$$

$$\left(\frac{2}{N_o N_o} \right)^4 S = \frac{21.937.306.201}{171.463.737.919.403.601} \times 16 = 0,000002047062$$

$$\left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right) \left[\sigma^4 + 3 \left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right)^2 P_{G1}^4 \right] = \frac{286}{20349} [0,000014837904 + 0,000124368080] = 0,000001956504$$

$$\tau^2 = 0,000002047062 -$$

$$0,000001956504$$

$$0,000000090558$$

$$\sqrt{\sigma^2 - \alpha \tau} = \sqrt{0,003428} = 0,058$$

$$\eta < 0,062 - 0,058 = 0,004$$

| $n_i \bar{N}_i^4$ | $\bar{v}_i N_i^2 \bar{N}_i$ | $n_i \bar{N}_i^2 N_i$ | $\bar{v}_i N_i^3$ | $n_i N_i^3$ |
|-------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------|----------------|
| 1,18 | 23.870,25 | 1.467,75 | 14.751.814,5 | 2,375 |
| 9.984 | 1.177.400 | 180.960 | 85.361.500 | 2.496 |
| 3.240.000 | 10.395.165 | 3.614.400 | 173.945.761 | 216.000 |
| 136.813.753 | 28.464.766 | 18.688.219 | 143.862.466 | 3.697.669 |
| 120.575.597 | 30.693.303 | 32.296.684,5 | 49.631.724 | 19.972.949,625 |
| 117.515.552 | 15.603.322,5 | 23.290.656 | 7.870.702,5 | 46.172.704 |
| 186.934.415 | 4.571.250 | 9.480.375 | 718.750 | 60.295.185 |
| 189.798.496 | 868.600 | 2.448.224 | 43.000 | 49.454.448 |
| 164.869.683 | 132.720 | 674.028 | 2.240 | 39.936.159 |
| 1607.223.196,5 | 6.121,75 | 67.860,25 | 23,5 | 17.677.595,125 |
| 426.980.678 | 91.936.518 | 90.742.874 | 476.187.981 | 237.425.208 |

$$\frac{1}{2,096} = 0,0000000418183$$

$$\left(\frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \right)^2 P_G 11^4 \Big] = \frac{300}{44758} 0,00000351 = 0,0000000235265$$

83 —

265

018

$$0933 = 0,030$$

$$30 = 0,003$$

RIASSUNTO.

Dopo aver richiamato i concetti di probabilità di transvariazione tra un gruppo ed una quantità e tra due gruppi, e stabilite le corrispondenti formule analitiche, ho considerato l'influenza che il caso ha sul valore delle costanti statistiche quando questo si desuma da campioni estratti a sorte entro una totalità, e, particolarizzata l'espressione del valore quadratico medio degli scarti che esse presentano nelle masse possibili osservazioni, rispetto al loro valore esatto, ho trovato che tale valore è funzione, nel caso delle probabilità di transvariazione, dei valori medi dei prodotti due a due degli scarti che le frequenze delle singole quantità del gruppo totale possono presentare nei campioni. Poichè per i maggiori sviluppi contenuti nel paragrafo 4 era necessario conoscere anche i valori medi del prodotto di tre e quattro scarti, ho determinato anche i valori medi di tali prodotti valendomi di una legge approssimata di probabilità che è l'estensione della legge normale al caso dell'estrazione in blocco delle palle da un'urna, nell'ipotesi di più alternative. L'errore che così s'introduce nell'espressione dello scarto quadratico medio è nullo quando, come in generale, si suppongano i campioni estratti da totalità illimitate, e piccolissimo, di ordine di grandezza assai inferiore all'errore che conviene introdurre per semplicità nella stessa, quando i campioni si suppongano estratti da totalità limitate.

Un errore maggiore importa, nell'applicazione della formula la sostituzione dei valori approssimati delle frequenze delle singole quantità dei due gruppi che si traggono dal campione, a quelli esatti, ma incogniti, relativi alla totalità. Ad un apprezzamento dell'ordine di grandezza di tale errore provvedono gli sviluppi del paragrafo 4.

Seguono varie applicazioni ed esempi.

CARLOS E. DIEULEFAIT

Sur les développements des fonctions des fréquences en séries de fonctions orthogonales

I. — Nous voulons montrer dans cet article qu'il est possible d'introduire d'une nouvelle façon, fort simple, les développements déjà connus, en se plaçant au point de vue de la génération systématique des fonctions orthogonales.

Il nous semble qu'avec ce procédé, dont les bases se rattachent à un travail du Prof. V. ROMANOVSKY que nous avons eu l'opportunité d'appliquer et de généraliser (*), on arrive à dominer l'ensemble de toutes ces questions en même temps qu'il est facile d'obtenir d'autres développements faisant défaut jusqu'ici.

II. — Etant donné les fonctions $u_0(x), u_1(x), \dots$ univoques, avec x variant dans l'intervalle $(a; b)$ et prenant les valeurs discontinues $x_0 = a, \dots, x_n = b$ et $x_{i+1} - x_i = h$, il est possible de déterminer les fonctions $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \dots$ orthogonales dans le domaine $(a; b)$.

La condition est :

$$(I) \quad \sum_{x=a}^b \Phi_R(x) \Phi_S(x) \begin{cases} = 0 & \text{pour } R \neq S \\ \neq 0 & \text{» } R = S. \end{cases}$$

La détermination des $\Phi_S(x)$ est possible de plusieurs façons, puisque la (I) conduit à un système d'équations indéterminées (telles que (3), etc., etc).

Si l'on choisit pour les $\Phi_S(x)$ des polynomes, alors tous ceux que l'ont peut former en remplissant la condition (I) différeront par une constante multiplicative.

(*) V. ROMANOVSKY. *On orthogonalising series of functions and interpolation*. « Biometrika ». Vol. XIX, pag. 93.

C. DIEULEFAIT. *Sobre una nueva introducc. de los polinomios de Legendre, etc.* « Anales de la Soc. Cientif. Argent. » Octb. 1932.

Avec ROMANOVSKY nous posons : $\Phi_0(x) = u_0(x)$ et

$$(2) \quad \Phi_1(x) = \alpha \Phi_0 + \beta u_1 \quad \text{d'où, étant } \sum_a^b \Phi_0 \Phi_1 = 0,$$

$$(3) \quad \alpha \sum_a^b \Phi_0^2 + \beta \sum_a^b \Phi_0 u_1 = 0 \quad \text{et en prenant } \beta = 1 \text{ on déduit } \alpha,$$

de sorte que la formule (2) peut s'écrire :

$$\Phi_1(x) = - \frac{\sum_a^b \Phi_0 u_1}{\sum_a^b \Phi_0^2} \Phi_0 + u_1.$$

D'une façon analogue on obtient :

$$\Phi_v(x) = - \sum_{l=0}^{v-1} \frac{\sum_a^b \Phi_l u_v}{\sum_a^b \Phi_l^2} \Phi_l + u_v,$$

que l'on peut écrire aussi, grâce à la condition (1) :

$$(4) \quad \Phi_v(x) = - \sum_{l=0}^{v-1} \frac{\sum_a^b \Phi_l \cdot u_v}{\sum_a^b \Phi_l \cdot u_l} \cdot \Phi_l + u_v.$$

III. — Si x dans l'intervalle (a, b) varie d'une façon continue alors, pour satisfaire les conditions

$$(5) \quad \int_a^b \Phi_R(x) \cdot \Phi_S(x) dx \begin{cases} = 0 & \text{pour } R \neq S \\ \neq 0 & \text{» } R = S \end{cases}$$

par rapport aux fonctions bases $u_0(x)$, $u_1(x)$, ... données, on déterminera les $\Phi_v(x)$ par des formules semblables à (4) qu'il est facile de trouver. On obtiendra :

$$(6) \quad \Phi_v(x) = - \sum_{l=0}^{v-1} \frac{\int_a^b \Phi_l \cdot u_v \cdot dx}{\int_a^b \Phi_l \cdot u_l \cdot dx} \Phi_l + u_v.$$

IV. — On a obtenu ainsi un procédé simple pour générer des fonctions orthogonales pour des valeurs continues ou discontinues de la variable.

Nous avons démontré déjà (*) qu'en prenant $u_v(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^v \binom{2v}{v} x^v$ et $a = -1$, $b = 1$ la formule (6) donne les polynômes de LEGENDRE.

De même, en prenant $u_v(x) = \frac{v!}{2^v} \binom{2v}{v} \left(\frac{x}{v}\right)$ et en appliquant la formule (4) on obtient les polynômes $Q_v(x)$ de Mr. CHARLES JORDAN qui les avait obtenus en généralisant la fonction à dériver conduisant aux polynômes de Legendre (**).

Mr. PAUL LORENZ (***) a remarqué que les $Q_v(x)$ de CH. JORDAN appartiennent aux polynômes orthogonaux dont TCHEBYCHEFF avait donné une expression différente de celle trouvée par JORDAN. Remarquons ici que cette différence est due à la constante multiplicative que nous avons signalée.

Si par économie de calcul et dans l'intention de diminuer les probabilités d'erreur dues aux fautes de lecture des tables, on fait

$u_v(x) = \binom{x}{v}$ et on applique la formule (4) faisant varier x de 0 à $n-1$, l'on obtient :

$$(7) \quad \Phi_v(x) = \frac{1}{\binom{2v}{v}} \sum_{l=0}^v \binom{v+l}{l} \binom{v-n}{v-l} \binom{x}{l}.$$

L'avantage de donner à $u_v(x)$ la forme binomiale est que $\Phi_v(x)$ la conserve aussi et alors, si l'on développe :

$$f(x) = a_0 \Phi_0 + a_1 \Phi_1 + \dots + a_s \Phi_s + \dots$$

l'on voit, qu'en appliquant la condition des moindres carrés, on obtient :

$$a_s \cdot \sum_{x=a}^b \Phi_s^2(x) = \sum_{x=a}^b f(x) \Phi_s(x);$$

donc en tenant compte de la formule (7) le second membre dépend

(*) V. notre artic., loc. cit.

(**) CHARLES JORDAN. *Statistique Mathématique*. pag. 26. Paris, 1927.

(***) PAUL LORENZ. *Der Trend*, dans « Vierteljahrshefte z. Konjunkturforschung ». Berlin 1931, pag. 22.

des moments binomiaux pour la détermination desquels Mr. TCHEBERIKOFF a donné un schéma de calcul simple (*).

V. — Supposons valable le développement de $f(x)$

$$f(x) = \varphi(x) [a_0 F_0(x) + a_1 F_1(x) + \dots].$$

Pour la détermination des a_s selon la méthode classique de Fourier, il est nécessaire qu'il soit

$$(8) \quad \int_a^b \varphi(x) \cdot F_R(x) F_S(x) dx \begin{cases} = 0 & \text{pour } R \neq S. \\ \neq 0 & \text{» } R = S. \end{cases}$$

en supposant que x varie d'une façon continue entre a et b . Nous dirons que les $F_S(x)$ sont orthogonales avec le noyau $\varphi(x)$ et l'on peut voir que leur génération par rapport à la base $u_S(x)$ est tout à fait semblable à celle de (4) ou (6).

Ainsi on arrive à

$$(9) \quad F_S(x) = - \frac{s-1 \int_a^b \varphi(x) F_1(x) u_S(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) F_1(x) u_1(x) dx} F_1(x) + u_S(x).$$

VI. — Si l'on adopte le noyau de LAPLACE c'est à dire

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ la suite base } u_v(x) = (-1)^v x^v, \text{ et } (-\infty; +\infty)$$

l'intervalle où x varie d'une façon continue, il est facile de voir que la formule (9) définit les polynômes d'HERMITE et alors notre développement correspond à celui de GRAM-CHARLIER.

On n'a pas besoin ainsi des démonstrations prouvant que ces polynômes d'HERMITE sont orthogonaux, puisqu'on les a déterminés en appliquant cette condition. Cette remarque vaut pour la suite.

$$\text{VII. — Si le noyau est ici celui de POISSON, } \varphi(x) = \frac{m^x \cdot e^{-m}}{x!},$$

(*) V. le remarquable ouvrage : CH. JORDAN. *Sur la détermination de la tendance séculaire des grandeurs statistiques par la méthode des moindres carrés.* « Journal de la Soc. Hongroise de Statistique » 1929, n. 4.

V. aussi C. DIEULEFAIT. *La determinación del trend en las series economicas.* « Univ. del Litoral. Public. ». Gabinete de Estadística. Octub. 1932.

les bases $u_v(x) = \frac{v!}{m^v} \binom{x}{v}$ et $(0; +\infty)$ l'intervalle où x varie d'une façon discontinue, on obtient le développement de CHARLIER-POISSON. On pourrait aussi dire que la formule (9) en changeant les intégrales en sommes conduit aux polynômes $G_v(x)$ de Ch. JORDAN, car entre eux il n'y a qu'une différence de signes, bien que les génératrices respectives soient différentes (*).

Cette démonstration est aisée, il suffit pour arriver au but de remarquer que :

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^{x-1}}{(x-1)!} x = \frac{\delta \sum_0^{\infty} \frac{m^x}{(x-1)!}}{\delta m} = \frac{\delta \cdot m e^m}{\delta m}$$

avec des relations semblables pour la suite.

VIII. — On peut considérer, sous ce même point de vue, quelques généralisations qui ont été apportées par V. ROMANOVSKY pour obtenir des développements analogues à celui de CHARLIER, en partant des types I, II et III des courbes de KARL PEARSON.

Le procédé de ROMANOVSKY (**) diffère de celui que nous suivons ici. — Sur ces questions nous reviendrons dans un prochain article.

(*) V. CH. JORDAN. *Statist. Math.* loc. cit., pag. 36. V. aussi G. DARMOIS. *Statist. Math.*, pag. 141.

(**) « Biometrika » vol. XVI, page 106.

TOMMASO SALVEMINI

**Ricerca sperimentale sull'interpolazione grafica
di istogrammi (*)**

SOMMARIO

CAP. I. — *Scopi della ricerca.*

§ 1 : Dell'interpolazione grafica in generale, e dell'interpolazione di istogrammi in particolare. — § 2 : Interpolazioni grafiche e analitiche. — § 3 : Significato della ricerca.

CAP. II. — *I mezzi impiegati.*

§ 4 : I vari tipi di curve. — § 5 : Determinazione dei parametri e della scala. — § 6 : Determinazione degli istogrammi. — § 7 : Operatori dell'interpolazione.

CAP. III. — *I vari metodi di confronto.*

§ 8 : Confronto diretto, qualitativo. — § 9 : Confronto quantitativo mediante l'area compresa fra le due curve. — § 10 : Scostamento relativo dell'area differenziale. — § 11 : Indice di dissomiglianza del Gini. — § 12 : Metodo del Pearson. — § 13 : Considerazioni generali sui cinque metodi di confronto.

CAP. IV. — *Confronti per i singoli tipi di curve considerati e conclusioni.*

§ 14 : Tipo I. — § 15 : Tipo II. — § 16 : Tipo III. — § 17 : Tipo IV. — § 18 : Tipo V. — § 19 : Tipo VI. — § 20 : Tipo VII. — § 21 : Curva dei redditi. — § 22 : Curva di Lexis. — § 23 : Conclusioni.

APPENDICE : Esempio.

(*) Questo lavoro venne suggerito dal Prof. CORRADO GINI, durante la sua presidenza nell'Istituto Centrale di Statistica, e da lui affidato al Servizio matematico e cartografico. Esso venne eseguito sotto la direzione del Prof. LUIGI GALVANI, Capo di detto Servizio. Il lavoro stesso fu iniziato dal Dott. BRUNO DE FINETTI, che fissò i parametri delle equazioni dei nove tipi di curve presi in considerazione, costruì i grafici delle curve fondamentali, tutti gli istogrammi e stese, salvo alcune modificazioni, parte dei primi due paragrafi. Tutto il resto è opera del Dott. TOMMASO SALVEMINI (N. d. R.).

CAPITOLO I.

SCOPI DELLA RICERCA.

§ 1. — *Dell'interpolazione grafica in generale, e dell'interpolazione di istogrammi in particolare.*

Il problema dell'interpolazione consiste, nella sua più generale accezione, nel determinare una curva che debba soddisfare a un certo insieme di condizioni. Il caso più comune è quello in cui sono assegnate, esattamente o approssimativamente, le ordinate corrispondenti a un certo numero finito di punti, e il problema consiste allora nel determinare una curva — quella che in via presuntiva sembra meglio rispondere alla questione in esame — tra quelle che passano, per i *punti dati*, o rispettivamente in *prossimità di essi*. Il caso di cui ci occuperemo è un po' meno semplice, benchè si possa consideràre come una modificazione del precedente. Assegnata sarà, anzichè l'ordinata in determinati punti, l'area A_i racchiusa, in determinati intervalli (x_{i-1}, x_i) , tra la curva e l'asse delle ascisse (in linguaggio analitico: l'integrale definito della funzione incognita nei dati intervalli).

Graficamente, il problema consiste — ed è questa la forma più chiara d'intenderlo ed esporla — nel costruire, assegnato un certo istogramma, una curva che conservi le aree corrispondenti ai singoli elementi, e precisamente quella, tra le infinite curve soddisfacenti tale condizione, che sembra la meglio rispondente all'andamento prevedibile del fenomeno rappresentato dall'istogramma. Più in generale si potrebbe imporre solo la condizione di conservare l'area totale dell'istogramma in modo che la curva interpolatrice elimini le accidentalità eventuali dell'istogramma e sia così più regolare; ma quando le singole aree siano sufficientemente estese, diviene giustificata la supposizione che le accidentalità risultino già eliminate nel loro interno, e risulta pertanto pienamente giustificato l'imporre la condizione accennata.

Che il problema si possa, matematicamente, considerare come una modificazione del precedente, è ovvio, qualora si assuma come funzione incognita da determinare in via presuntiva, anzichè l'originaria $f(x)$ vincolata alle condizioni

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = A_i,$$

il suo integrale indefinito

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx,$$

che risulta vincolato ad assumere, nei punti x_i , le ordinate prefissate

$$F(x_i) = \sum_h^i A_h.$$

Ma, se i due problemi sono perfettamente equivalenti dal punto di vista analitico, non va dimenticato che ciò che si deve tener presente è l'andamento della $f(x)$, di cui, considerandolo per il tramite della $F(x)$, non si ha più una percezione immediata, ma soltanto una determinazione indiretta. Tale inconveniente — che non può certo avere alcun valore nel caso di una interpolazione analitica, dove intervengono in modo esclusivo e preciso le proprietà logiche, oggettive — ha invece la massima portata nel caso di un procedimento grafico, che ha sempre un carattere più o meno approssimativo e soggettivo.

Un metodo grafico può dare un risultato assai soddisfacente, quando si guardi quel particolare aspetto della questione che si è tenuto presente nell'eseguire l'interpolazione grafica, ma non è detto che guardando un altro aspetto della questione, l'approssimazione debba ancora ritenersi soddisfacente, specie se questo secondo aspetto che si considera è molto sensibile alle anche piccole e in se stesse insignificanti variazioni del primo. Così, nel caso nostro, se mediante una interpolazione grafica costruiamo la curva integrale $F(x)$, e da essa vogliamo risalire alla curva di distribuzione $f(x)$, quest'ultimo passaggio è costituito da una *derivazione*, e cioè dalla ricerca dell'inclinazione della retta congiungente due punti del diagramma quando i due punti tendono a coincidere. Ora è noto che, quanto più due punti sono vicini, tanto maggiore difficoltà e incertezza si incontra nel tracciare la retta che li congiunge, e un grado *a fortiori* ancor più grande di difficoltà e di incertezza si ha quindi nel determinare graficamente la derivata, e cioè il limite a cui tende una grandezza nel tempo stesso in cui essa viene ad essere praticamente sempre più indeterminata.

§ 2. — *Interpolazioni grafiche e analitiche.*

I vantaggi e gli inconvenienti delle interpolazioni grafiche e analitiche, che abbiamo avuto occasione di rilevare incidentalmente nel caso particolare del problema che ci interessa, hanno però una ragione profonda e, di conseguenza, un valore assolutamente generale.

L'interpolazione non è uno di quei problemi univocamente e obbiettivamente determinati, e nei quali, di conseguenza, l'applicazione dei metodi analitici, quanto più precisi e delicati, è altrettanto più utile e rispondente all'essenza della questione. Nel caso dell'interpolazione l'eventuale impostazione matematica non è una pura e semplice traduzione in linguaggio analitico di condizioni atte per se stesse a individuare la curva. Si tratta invece, in primo luogo, di limitare giudiziosamente il campo di scelta della curva, in un modo che *non* è conseguenza delle poche condizioni veramente obbiettive imposte al suo andamento. È assai difficile, pertanto, riconoscere se e in qual grado dette condizioni corrispondono alle vaghe e in gran parte soggettive particolarità che la conoscenza del problema pratico ci lascia presumere. In secondo luogo si tratta di fissare una fra le curve del tipo prescelto, come quella che dovrebbe presumibilmente meglio rispondere al problema. Ma anche il criterio per questa scelta è basato, in noi, piuttosto su impressioni soggettive e imprecise; volendole tradurre in una formula matematica precisa, in un metodo analitico di calcolo, ci si ripresenta la stessa precedente difficoltà che è assai malagevole riconoscere se e fino a qual punto un tale metodo può fedelmente rispecchiare quelle nostre soggettive impressioni.

Un procedimento analitico non elimina quindi affatto l'arbitrio insito nel problema dell'interpolazione; soltanto lo si concentra tutto in due tempi, quello della scelta del tipo di funzione e quello del procedimento per l'interpolazione, dopo di che il calcolo segue in modo automatico e univoco. Ciò può essere comodo, e si ha, in più, il vantaggio di assicurare all'andamento della curva interpolata una spiccata regolarità, ma è anche pericoloso perchè questo procedere analiticamente può non consentire di tener conto, nel modo e nella misura che il buon senso farebbe apparire più opportuno, di tutte le circostanze pratiche di cui, invece, si può tener conto con immediatezza in un procedimento grafico.

In alcuni casi, per es., l'interpolazione con un'unica funzione,

per tutta la serie, può non mettere in evidenza qualche *fatto nuovo* che modifichi o interrompa la serie, mentre, in altri casi, il procedimento analitico può non permettere di eliminare sufficientemente l'influenza di fattori accidentali di perturbazione o di quelli sistematici. Può accadere, inoltre, che per rispecchiare bene l'aspetto di un istogramma occorra servirsi di funzioni complicate, mentre, talvolta, a seconda degli scopi prefissati, si potrebbe utilizzare l'interpolazione grafica, specialmente se, a indagine compiuta, si potrà concludere che questa fornisce in molti casi buoni risultati. Essa è allora da preferirsi senz'altro, d'accordo col criterio della massima semplicità (*).

§ 3. — *Significato della ricerca.*

Il continuo uso dell'interpolazione grafica di istogrammi in molte ricerche e segnalatamente in quelle statistiche, rende evidente la grande utilità di potere disporre di criteri in base ai quali sia possibile riconoscere la maggiore o minore esattezza della interpolazione (dove per esattezza intendiamo che la curva interpolatrice ottenuta è quella che, presumibilmente, meglio risponde al problema), e quindi prevedere fino a qual punto ci si possa fidare di questo mezzo, e all'occorrenza, porgere adeguati elementi per effettuare eventuali correzioni.

Bisognerebbe a tale uopo possedere cognizioni sul modo di orientarsi della soggettività dell'operatore, ma nessuno può dire, sia pure approssimativamente, come si svolge l'attività umana in questo genere di operazioni. L'unico mezzo che possa darci dei lumi è quello sperimentale, ed è appunto di questo mezzo che ci siamo serviti nel compiere la nostra ricerca.

Per essere in grado di decidere sulla maggiore o minore esattezza di una interpolazione occorre poter confrontare la curva interpolatrice (che dipende dalla soggettività dell'operatore) con una curva *fondamentale* od *originaria* relativa al dato istogramma, cioè con una curva che rispecchia bene l'andamento continuo del fenomeno, rappresentato dall'istogramma per successivi valori medi, cioè in forma discontinua. A tale scopo si è prima costruita la curva (fondamentale) rappresentativa di una data funzione $y = f(x)$, per x variabile in un intervallo (x_0, x_n) , poi s'è diviso il detto intervallo

(*) C. GINI. *Considerazioni sull'interpolazione e la perequazione di serie statistiche* « Metron » Vol. I, n. 3, 1921.

(x_0, x_n) in intervalli parziali (x_{i-1}, x_i) , $(i = 1, 2, \dots, n)$; il valore dell'integrale

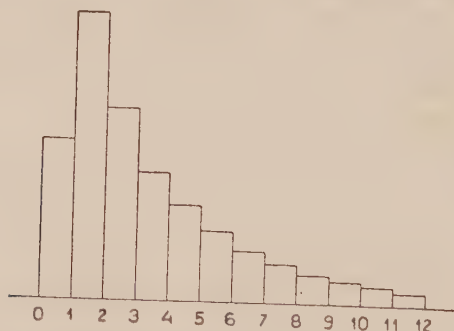
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

costituisce l'area A_i di un elemento generico (colonna) di istogramma e cioè di quello che si appoggia sull'intervallo (x_{i-1}, x_i) . Dividendo questo valore per l'ampiezza dell'intervallo si è ottenuta l'altezza di quell'elemento. Così dalla curva data $y = f(x)$ si ottiene *in modo unico* (in corrispondenza a quel dato sistema di intervalli parziali) un istogramma con n elementi, ciascuno dei quali ha come base l'intervallo parziale (x_{i-1}, x_i) , $(i = 1, \dots, n)$.

La scelta delle curve da noi prese a modello, è stata oggetto di particolare attenzione; si sono scelte infatti curve di frequenze tipiche, che più spesso s'incontrano negli studi statistici.

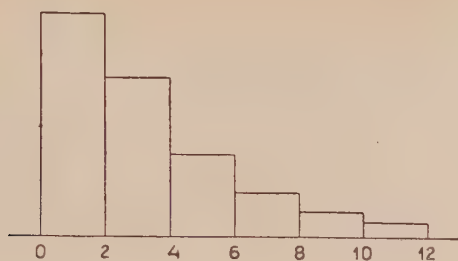
Allo scopo di esaminare come, al variare dell'ampiezza della base di ciascun elemento di istogramma, la curva interpolata si discosta da quella originaria, si sono considerate basi di ampiezze diverse. È chiaro, infatti, che variando la larghezza delle singole colonne dell'istogramma, varia la facoltà di scelta dell'operatore nel dare alla curva un andamento anzichè un altro. Ma l'importanza della conoscenza del modo di variare della curva interpolata con l'ampiezza di ogni elemento dell'istogramma, risulta chiara dal seguente esempio.

In un istogramma, come quello rappresentato dalla figura



risulta evidente l'andamento prima rapidamente crescente e poi decrescente del fenomeno e quindi della curva interpolatrice (pur essendovi, per es., l'incertezza se alla curva interpolatrice bisognerà dare un inizio tangenziale all'asse x , oppure altra inclinazione); ma se raddoppiamo l'ampiezza degli intervalli parziali su cui si sono

costruiti gli elementi dell'istogramma, questo assume la forma seguente :



In tal caso l'operatore sarà incerto se far partire la curva interpolatrice dal valore zero dell'ordinata o da un punto con ordinata di valore diverso da zero, e attribuire così ad essa un andamento prima crescente e poi decrescente, oppure un andamento continuamente decrescente. L'operatore dell'interpolazione deve, in simili casi, avere qualche conoscenza della natura della distribuzione, che gli permetta, in via generica, di intuire l'esatto andamento della curva rappresentatrice del fenomeno.

Ora, in generale, l'operatore di una interpolazione è un disegnatore che, nel tracciare l'andamento della curva si vale principalmente della sua impressione istantanea e oltre che non avere una diretta cognizione dell'esatto andamento della curva interpolatrice, solo raramente è guidato dallo statistico interessato della ricerca.

Appunto in vista di queste considerazioni, ai disegnatori si sono presentati gli istogrammi da interpolare senza fornir loro alcun indizio dell'andamento della curva. In tal modo, attraverso il successivo esame quantitativo della adesione delle curve interpolate alle rispettive curve originarie, si potrà vedere quali sono le principali manchevolezze che generalmente si riscontrano nelle curve interpolatrici di istogrammi, come varia l'esattezza della curva interpolatrice al variare del tipo di curva originaria, al variare delle ampiezze delle colonne dell'istogramma e della divisione dell'intervallo totale in intervalli parziali ; inoltre si potrà valutare l'influenza che la familiarità del disegnatore con le curve di uso frequente nella statistica, e, in generale, la conoscenza da parte di esso di questioni statistiche hanno sul tracciato della curva. Se è vero, come sembra prevedibile, che ciascun operatore ha una propria e caratteristica tendenza (equazione personale) nell'eseguire l'interpolazione grafica in modo che le curve da lui tracciate, qualunque sia il tipo, si discostano quasi sem-

pre egualmente dalla curva fondamentale, la nostra ricerca consente di valutare, naturalmente in via sempre approssimativa, la maggiore o la minore esattezza di una qualunque interpolazione grafica eseguita da quel disegnatore; è ovvio che ad ogni nuovo operatore si dovrebbe far ripetere la stessa prova.

Per ultimo, si potrà ricercare se il grado di adesione della curva interpolata alla curva fondamentale vari col variare del tipo di curva, in relazione, per es., ad una spiccata tendenza del disegnatore che ha eseguito l'interpolazione verso le curve simmetriche, o verso quelle a forma tozza o snella, o alle forme ondulate, gibbose, ecc.

È chiaro che per eseguire questa indagine, in modo da poter trarre precisi ammaestramenti, sarebbe opportuno avere a disposizione un materiale molto copioso.

Noi, in questo lavoro, che riteniamo il primo su tale argomento, servendoci di un numero non troppo esiguo di istogrammi interpolati, abbiamo procurato di rispondere alla maggior parte dei precedenti quesiti, paghi di aver ricercato con quali criteri si debbano costruire gli istogrammi, in modo da eliminare almeno gli errori sistematici che si rilevano nelle interpolazioni grafiche in questione, o, qualora l'istogramma non si possa costruire in altro modo, quali elementi sussidiari inerenti al fenomeno convenga conoscere oltre l'istogramma per avere una curva interpolatrice che meglio risponda all'andamento reale del dato fenomeno.

CAPITOLO II.

I MEZZI IMPIEGATI.

§ 4. — *I vari tipi di curve.*

Le curve di frequenze più comuni nella statistica sono quelle unimodali, e, negli estremi, tangenti all'asse delle ascisse. Se si indica allora con $y = f(x)$ l'equazione di una tale curva, la sua derivata prima $\frac{dy}{dx}$ deve annullarsi nel punto α di ordinata massima, e negli estremi, in cui è $y = 0$. Analiticamente queste due condizioni si traducono nell'equazione differenziale

$$(I) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(x - \alpha)}{F(x)},$$

dove $F(x)$ rappresenta una funzione dalla cui espressione dipende la forma della curva. È da osservare, in particolare, che $\frac{d y}{d x}$ può non essere zero per $y = 0$, se è contemporaneamente nulla la $F(x)$ (per qualche valore di x).

Il PEARSON, integrando (*) la (I), dopo aver sostituito a $F(x)$ il polinomio $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, ha ottenuto, a seconda dei particolari sistemi di valori dati a b_0, b_1, b_2 le seguenti sette diverse equazioni, corrispondenti, rispettivamente, a sette diversi tipi di curve di frequenze :

$$(I) \quad y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{v a_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{v a_2}$$

$$(II) \quad y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m$$

$$(III) \quad y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\gamma a} e^{-\gamma x}$$

$$(IV) \quad y = y_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-m} e^{-v \arctg \frac{x}{a}}$$

$$(V) \quad y = y_0 x^{-p} e^{-\gamma/x}$$

$$(VI) \quad y = y_0 (x - a)^{q_2} x^{-q_1}$$

$$(VII) \quad y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Le lettere rappresentano numeri generalmente positivi; nelle applicazioni che seguono le sostituiamo sempre con numeri positivi.

Ricordiamo che di queste equazioni solo la (II) e (VII) danno luogo a curve simmetriche, e precisamente la (II) è del tipo binomiale, così frequente nella statistica, e la (VII) è la ben nota curva degli errori o curva di Gauss.

La *moda* delle curve rappresentate dalle precedenti equazioni è nell'origine per i tipi I, II, III, e VII, mentre per il tipo IV è nel punto di ascissa $-\frac{v a}{2 m}$, per il V nel punto $x = \frac{\gamma}{p}$, e per il

VI tipo nel punto $x = \frac{a q_1}{q_1 - q_2}$.

(*) Vedasi ELDERTON, *Frequency-curves and correlation*, Layton, London, 1906.

Ricordiamo pure che i valori di x che rendono nullo il secondo membro di ciascuna delle precedenti equazioni, per i quali, cioè, le corrispondenti curve incontrano l'asse x , sono indicati qui appresso :

| | |
|------------|--------------------------------|
| per la (I) | $x_1 = -a_1, x_2 = a_2$ |
| » (II) | $x_1 = -a, x_2 = a$ |
| » (III) | $x_1 = -a, x_2 = +\infty$ |
| » (IV) | $x_1 = -\infty, x_2 = +\infty$ |
| » (V) | $x_1 = 0, x_2 = +\infty$ |
| » (VI) | $x_1 = a, x_2 = +\infty$ |
| » (VII) | $x_1 = -\infty, x_2 = +\infty$ |

Oltre questi sette tipi di curve, (del Pearson), abbiamo considerato altri due tipi di curve di frequenze : la curva dei redditi secondo Pareto (*) di equazione

$$(VIII) \quad y = \frac{A}{x^\alpha}$$

con $\alpha > 0$ e $x \geq 1$, nella quale si deve intendere che y rappresenti il numero degli individui aventi un reddito non inferiore ad x , e la curva di Lexis (**) che rappresenta la distribuzione dei morti provenienti da una data generazione e distinti a seconda della loro età.

Di quest'ultima curva, di natura empirica, non si ha una equazione, mentre per il nostro scopo è necessario avere una rappresentazione analiticamente ben determinata per poter calcolare in modo unico l'area

$$A_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} y \, dx \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

di ogni elemento di istogramma corrispondente all'intervallo (x_{i-1}, x_i) , ($i = 1, 2, \dots, n$), ottenuto dividendo in n parti l'intervallo totale in cui si considera la curva.

È noto (***) però, che la curva di Lexis si può comporre, appros-

(*) PARETO. *Cours d'économie politique*, II, Losanna 1897. Questo autore ha proposto anche una curva con un numero maggiore di parametri, ma per il nostro scopo basta considerare il tipo più semplice.

(**) W. LEXIS. *Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft*, Freiburg, i. B, Fr. Wagner, 1877.

(***) Vedasi E. RASERI. *La mortalità nei vari stadi della vita*. Bulletin de l'Institut International de Statistique. Rome, XI, 2^{ème} Livraison.

simativamente (a incominciare da sinistra), con una curva di tipo iperbolico e con tre curve del tipo VII, aventi rispettivamente la moda in tre punti distinti che diciamo β, γ, δ ; cioè essa si può rappresentare con un'equazione del tipo

$$(IX) \quad y = \frac{A}{(x + \alpha)^2} + A_1 e^{-\frac{(x-\beta)^2}{2\sigma_1^2}} + A_2 e^{-\frac{(x-\gamma)^2}{2\sigma_2^2}} + A_3 e^{-\frac{(x-\delta)^2}{2\sigma_3^2}}.$$

§ 5. — *Determinazione dei parametri e della scala.*

Ricordati i più usuali tipi di curve di frequenze, si presenta la questione pratica di determinare i parametri delle equazioni e la scala del disegno, in modo che la rappresentazione dei valori ricavati da ciascuna equazione sia tutta contenuta in un foglio non molto grande di carta millimetrata. (Si sono adoperati fogli con le dimensioni massime di m. 1 per m. 0,70).

Intanto per le curve del Pearson dei tipi I, II, III e VII, il massimo valore della frequenza è dato dal parametro y_0 e perciò, se poniamo che sull'asse delle ordinate ogni millimetro sia uguale a due unità, potremo fare $y_0 = 1000$ unità, ed allora i grafici dei detti quattro tipi avranno un'ordinata massima di 50 cm. L'arco di iperbole (per $x \geq 1$) assunto a rappresentare la curva dei redditi, di andamento sempre decrescente, ha la massima ordinata nel punto $x = 1$, e perciò, scegliendo nella (VIII) $A = 1000$ e servendoci della precedente scala per la rappresentazione delle frequenze, il suo grafico avrà l'altezza massima di 50 cm.

Per i rimanenti tre tipi del Pearson il valore di y_0 si determinerà dopo aver fissato gli altri parametri, in modo da avere anche in questi casi l'ordinata massima dei grafici di 1000 unità e quindi, con la precedente scala, corrispondente ad un'altezza di 50 cm.

Per la curva di Lexis non si può seguire lo stesso criterio; di essa parleremo in seguito.

La determinazione degli altri parametri delle equazioni (I), (II), , (VIII) e di quelli della (IX), come pure la scelta della scala di misura sull'asse delle ascisse del foglio da disegno vien fatta non seguendo un unico criterio, ma in base ad un'insieme di considerazioni, diverse da tipo a tipo, ed è perciò necessario prendere in esame singolarmente ciascuno dei suddetti nove tipi di curve di frequenza.

a) Per la curva di equazione (I) si è visto che i valori della x per cui la y diventa nulla sono $x_1 = -a_1$, $x_2 = a_2$, e perciò se assu-

miamo $a_1 = 2$, $a_2 = 12$, $v = \frac{1}{2}$ e prendiamo l'unità di misura sull'asse delle ascisse uguale a cm. 2,5, otteniamo un diagramma per il quale è più che sufficiente la grandezza dei nostri fogli di carta millimetrata, perchè l'ampiezza totale dell'intervallo di variabilità della x viene ad essere di cm. 35.

Come curva fondamentale del tipo I possiamo prendere allora la

$$(I^*) \quad y = 1000 \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{x}{12}\right)^6$$

rappresentata dalla linea piena nei grafici 1 e 2 (*).

b) La funzione (II) si annulla per $x_1 = -a$, $x_2 = a$, e facendo $a = 7$ il corrispondente diagramma si estende, come nel caso precedente, per 14 unità e quindi sull'asse delle ascisse basterà prendere l'unità di misura uguale a 2,5 cm; per l'esponente m si può assumere il valore 4, e la (II) diventa allora

$$(II^*) \quad y = 1000 \left(1 - \frac{x^2}{7^2}\right)^4.$$

La sua rappresentazione grafica è data dalla curva disegnata con linea piena nei grafici 3, 4 e 5.

c) Le curve di frequenze del terzo tipo partono dal valore $x_1 = -a$ e, dopo aver raggiunto il massimo nel punto $x = 0$, decrescono assumendo infine un andamento asintotico all'asse delle $x > 0$. Bisogna quindi arrestare la rappresentazione grafica di questo tipo di curva in qualche punto, la cui determinazione dipende dalla scala scelta sull'asse delle ascisse e dai limiti del foglio. Orbene, si vede che assunto $a = 3$ e $\gamma = 1$, i valori di y dati dalla (III) per $x \geq 12$ sono inferiori all'unità, cioè (avendo fissata l'unità di misura dell'ordinata

(*) I grafici nominati via via in questo paragrafo sono tutti nel Cap. IV, ciascuno nel paragrafo che porta per titolo il tipo di curva rappresentata dal grafico stesso.

Avvertiamo poi che, per la riproduzione di questi grafici, abbiamo ridotto a 1/6 gli originali dei tipi I, II, IV₂, V, VI e VII, a 1/5 quelli dei tipi III e IV₁, infine a 1/7 quelli delle curve dei redditi e di Lexis.

eguale a $\frac{1}{2}$ mm.) inferiori a $\frac{1}{2}$ mm. e quindi praticamente poco apprezzabili.

Perciò limiteremo lo studio di questa curva al punto $x = 13$, ed essendo allora l'intervallo totale in cui si fa variare la x tra -3 e 13 cioè di 16 unità, potremo prendere sull'asse delle ascisse, anche per questo tipo, l'unità di misura eguale a cm. 2,5. L'equazione fondamentale del III tipo è quindi

$$(III^*) \quad y = 1000 \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 e^{-x}$$

per x variabile tra -3 e 13 , e la corrispondente rappresentazione è quella curva disegnata con linea piena nei grafici 6 e 7.

d) La curva rappresentata dalla funzione (IV) si avvicina asintoticamente all'asse delle x da l'una e da l'altra banda della origine.

Perciò, come nel caso precedente, limiteremo lo studio di questa curva ad un intervallo in cui le ordinate si mantengono sufficientemente apprezzabili.

Intanto bisogna determinare la y_0 . Poichè il punto di massima frequenza si ha per $x = -\frac{a v}{2 m}$, se assumiamo $v = 1$ ed $m = 3/2$,

risulterà $x = \frac{a}{3}$. Sostituendo questi valori nella (IV) e ponendo

$y = 1000$ si ha

$$1000 = y_0 \left(1 + \frac{1}{9}\right)^{-3/2} e^{-\arctg \frac{1}{3}}$$

da cui si ricava $y_0 = 848,99$.

Se facciamo il parametro $a = 1/2$ si vede, mediante qualche calcolo di saggio, che possiamo limitare lo studio della curva nell'intervallo $(-8, 4)$ e prendere come unità di misura delle ascisse la medesima unità dei tipi precedenti cioè cm. 2,5.

Però la rappresentazione grafica (vedesi linea piena nei grafici. 8, 9 e 10) della equazione

$$(IV_1^*) \quad y = 848,99 (1 + 4 x^2)^{-3/2} e^{-\arctg 2 x}$$

ottenuta dalla (IV) con la sostituzione dei detti valori per i parametri, ha una forma molto slanciata e stretta; ciò fece prevedere — e se ne

ebbe successivamente, come vedremo, la conferma — che gli operatori, incaricati di interpolare i relativi istogrammi, potevano difficilmente intuire una forma così poco comune. Perciò, oltre agl'istogrammi costruiti servendosi della (IV_1^*) , si è pensato di costruire altri cinque istogrammi servendosi della equazione ottenuta facendo $a = 1$ anzichè $a = 1/2$; cioè della

$$(IV_2^*) \quad y = 848,99 (1 + x^2)^{-3/2} e^{-\operatorname{arctg} x}$$

e prendendo sull'asse delle ascisse come unità di misura cm. 5. In questo modo si è ottenuto nell'intervallo $(-10,4)$ — vedasi linea piena nei grafici 11 e 12 — una curva più dilatata con andamento meno eccezionale.

e) Il quinto tipo del Pearson, comprende curve che si svolgono tra il valore $x_1 = 0$ e $x_2 = +\infty$. Il ramo discendente delle curve di questo tipo ha una pendenza che diminuisce con uniformità, e ciò rende evidentemente facile al disegnatore l'intuire e quindi il tracciare questo ramo della curva interpolatrice. Perciò, per questo tipo, basterà arrestarci in un punto qualunque purchè convenientemente distante da quello di culminazione.

Dei tre parametri che figurano nella (V) fissiamo ad arbitrio $p = 4$; determiniamo γ in modo da eliminare la costante e che nei calcoli delle ordinate y porterebbe evidentemente maggiore lavoro data la sua espressione non intera. A tale scopo si osservi che

$$e^{-\frac{\gamma}{x}} = 10^{-\frac{\gamma}{x} \log e}$$

(dove il logaritmo s'intende, come sempre nei nostri calcoli, in base 10), e se prendiamo, per es., $\gamma = \frac{8}{\log e}$, otteniamo

$$e^{-\frac{\gamma}{x}} = 10^{-\frac{1}{x} \frac{8}{\log e} \log e} = 10^{-\frac{8}{x}},$$

cioè otteniamo una espressione che si presta ad un calcolo molto più rapido che non $e^{-\frac{\gamma}{x}}$. Assumiamo dunque $\gamma = \frac{8}{\log e} = 18,42068$.

Rimane da determinare y in modo che la massima frequenza abbia il valore 1000. Sappiamo che la moda è uguale a $\frac{\gamma}{p}$, cosic-

chè, sostituendo per γ e p i valori già fissati, si ottiene $\frac{2}{\log e}$. Dalla (V) abbiamo allora

$$1000 = y_0 \left(\frac{2}{\log e} \right)^{-4} e^{-4},$$

da cui

$$y_0 = 1000 \left(\frac{2e}{\log e} \right)^4 = 24 \cdot 556 \cdot 157.$$

In conclusione scriviamo come equazione di questo tipo di curva la

$$(V^*) \quad y = 2,4556 \cdot 10^7 \cdot x^{-4} e^{-\frac{18,42068}{x}},$$

e prendendo, come nei casi precedenti, sull'asse delle ascisse cm. 2,5 per unità di misura, la rappresenteremo graficamente (vedasi linea piena nei grafici 13 e 14) per valori di x compresi fra 0 e 30.

f) Dei tre parametri della equazione (VI) fissiamo ad arbitrio, $\alpha = 1$. I valori y sono allora positivi per x variabile nell'intervallo $(1, +\infty)$; la moda è nel punto $x = \frac{q_1}{q_1 - q_2}$ e per poterla avere, nella rappresentazione grafica, convenientemente distante dal punto 1 di partenza, cercheremo di ottenere, per es., $\frac{q_1}{q_1 - q_2} = 6$.

Calcoli di saggio hanno mostrato che non sarebbe stato conveniente prendere per q_1 e q_2 valori dell'ordine di grandezza di qualche unità, per es. 6 e 5, perchè la corrispondente rappresentazione grafica avrebbe avuto il ramo discendente con inclinazione molto lenta cosicchè, anche al margine del foglio la curva si sarebbe mantenuta molto discosta da l'asse delle ascisse, e non era opportuno trascurare un tratto con ordinate notevoli. Si è preso quindi $q_1 = 36$, $q_2 = 30$.

Dalla relazione

$$1000 = y_0 5^{30} 6^{-36}$$

si ottiene il valore $y_0 = 10^{10} \cdot 1,10751$.

La scala da adoperare sarà la solita sull'asse delle ordinate, mentre sull'asse delle ascisse prenderemo come unità cm. 2 per avere un

grafico meno esteso nel senso delle base ; arresteremo lo studio di questo grafico al punto di coordinata $x = 21$. Per curva fondamentale del VI tipo di Pearson possiamo prendere dunque la

$$(VI^*) \quad y = 1,10751 \cdot 10^{10} (x - 1)^{30} x^{-36}$$

con x variabile tra 1 e 21, la cui corrispondente rappresentazione è data dalla curva tracciata con linea piena nei grafici 15 e 16.

g) Già al principio di questo paragrafo si disse che il parametro y_0 della (VII) può farsi uguale 1000 e prendere sull'asse delle ordinate la solita scala di 1 unità eguale a 1/2 millimetro. Rimane da determinare σ .

A tale scopo cerchiamo di utilizzare una tavola (*) che dia i valori di $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ e anche quelli dell'integrale $\int_0^t \Phi(t) dt$, giacchè, posto $t = \frac{x}{\sigma}$, la (VII) può scriversi

$$y = 1000 \sqrt{2\pi} \Phi(t).$$

Per avere i valori di y più grandi dell'unità, occorre che t sia inferiore a 4, ed allora se fissiamo di far variare x tra i limiti — 15 e 15 basta fare $\sigma = 4$ per avere al massimo $t = \frac{15}{4} = 3,75$. La rappresentazione grafica dell'equazione che prendiamo per fondamentale del VII tipo s'è ottenuta prendendo cm. 2 come unità di misura sull'asse delle x . Essa dà luogo alla curva tracciata con linea piena nei grafici 17 e 18.

h) Nell'equazione (VIII) oltre al parametro A , che si è già fissato eguale 1000, figura il parametro α che generalmente si aggira intorno a 1,5.

Però per avere una curva che si avvicini più rapidamente all'asse x s'è posto $\alpha = 2,5$.

In questo modo si rende abbastanza variabile la espressione x^α e un semplice calcolo di saggio mostra che possiamo limitare lo studio della curva fino al punto di ascissa $x = 4$.

(*) Vedasi W. F. SHEPPARD, *New tables of the probability integral*, « Biometrika », vol. II, 1903.

Allora come unità di misura sull'asse x si può prendere — per avere chiarezza nel disegno — cm. 25.

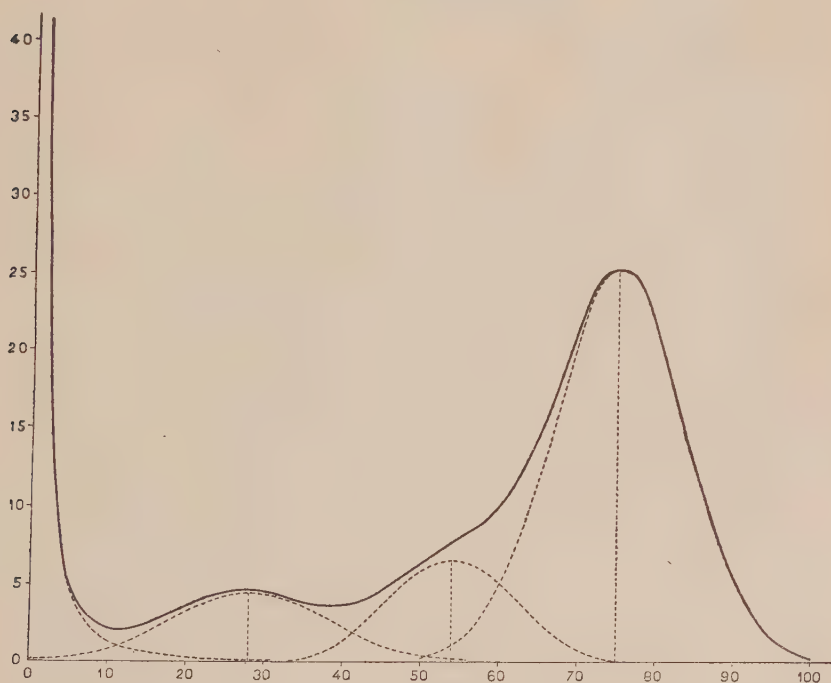
La curva dei redditi sarà dunque assunta nella forma

$$(VIII^*) \quad y = \frac{1000}{x^{2.5}}$$

la cui rappresentazione è la linea piena dei grafici 19 e 20.

i) Alla fine del paragrafo precedente si è assunto l'equazione (IX) a rappresentare la curva (empirica) di Lexis.

Vediamo ora come si suol fare la scomposizione di una curva di Lexis nelle quattro componenti corrispondenti a ciascuno dei quattro addendi della (IX). Serviamoci a tal uopo della curva, rappresentata dalla fig. seguente, dedotta, a meno di qualche opportuna modifica onde ottenere una buona scomposizione, dalla tavola italiana di mortalità 1921-22, Regno (vecchi confini) MF. (*).



(*) C. GINI e L. GALVANI, *Tavole di mortalità della popolazione italiana*, « Annali di Statistica », serie VI, vol. VIII, Roma, 1931-X.

Si consideri l'ultimo tratto discendente della curva (cioè quello a destra dell'ultimo punto di culminazione), che può approssimativamente considerarsi come il ramo discendente di una curva degli errori e se ne disegni il ramo simmetrico. Si riporti su ogni ordinata, a partire dall'asse x , la differenza tra le ordinate della curva data di Lexis e quelle del ramo ora descritto. I punti estremi di queste ordinate formano, approssimativamente e fino a un certo punto, uno dei rami discendenti di una curva del tipo gaussiano; di questo ramo si costruisce il simmetrico e si ottiene così una curva che soddisfa a una equazione del tipo $y = A e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ e che ha la moda tra i valori di x corrispondenti a 50 e 60 anni, cioè in quell'intervallo nel quale la curva di Lexis presenta una specie di gobba.

Ripetendo ancora questo procedimento si ottiene un'altra curva dello stesso tipo con un massimo in corrispondenza all'età di 28 anni circa.

Segnando infine su ogni ordinata i punti estremi delle differenze fra le corrispondenti ordinate della curva data con quelle dell'ultima curva costruita, si ottiene una curva residua di tipo iperbolico rappresentata dal primo termine della (IX).

In generale le curve di Lexis costruite rappresentando il numero dei morti forniti da una tavola di mortalità su una generazione fittizia di 1000 nati, non sono così regolari da dare luogo esattamente a tre curve degli errori e a una curva iperbolica.

Ciò è tuttavia di poca importanza per noi, perchè ci basta, come già osservammo, di poter disegnare una curva di riferimento che sia immagine di una certa equazione, in modo da poter determinare con esattezza l'area racchiusa tra la curva l'asse x e le ordinate negli estremi di un qualunque intervallo (x_{i-1}, x_i) , e che rappresenti bene l'andamento caratteristico delle curve del tipo di Lexis.

Quanto al calcolo dei parametri, vediamo che il primo termine $\frac{h}{(x + \alpha)^2}$ della equazione (IX) contiene α e h , di cui fissiamo ad arbitrio $\alpha = \frac{2}{3}$ e determiniamo h dalla condizione

$$\int_0^{\infty} \frac{h}{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2} dx = \Omega,$$

dove Ω rappresenta l'area compresa tra i due assi coordinati e la curva di tipo iperbolico rappresentata graficamente nella figura 1. Questa curva rappresenta nell'intervallo $[0,5]$ il numero dei morti ad una età compresa tra 0 e 5 anni, e perciò in detto intervallo essa deve racchiudere un'area eguale a 207, tanti essendo, secondo le citate tavole di mortalità, i morti nel detto intervallo. Nell'ulteriore tratto in cui sono apprezzabili le ordinate, sostituiamo alla curva una spezzata a gradinata, con ogni gradino di ampiezza 1, e che racchiude un'area approssimativamente uguale a quella racchiusa dal tratto di curva in questione (*). La somma delle altezze dei segmenti di spezzata, che sono paralleli all'asse x , dà l'area racchiusa da tutta la spezzata, e aggiunta al numero 207 precedentemente trovato, dà per Ω il valore 225, ed allora

$$\int_0^{\infty} \frac{h dx}{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2} = \left[\frac{h}{x + \frac{2}{3}} \right]_0^{\infty} = \frac{3h}{2} = 225$$

da cui

$$h = 150.$$

La curva di tipo iperbolico si può dunque rappresentare con l'equazione

$$y = \frac{150}{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1350}{(3x + 2)^2}.$$

Per ciascuna delle curve del tipo VII bisogna tener conto :

- 1) del valore di x a cui corrisponde la massima ordinata perchè per questo valore l'esponente di e deve annullarsi ;
- 2) del valore di massima ordinata che rappresenta il coefficiente A , dell'esponenziale ;
- 3) dell'ampiezza dell'intervallo di variabilità delle x in cui limitiamo la valutazione delle ordinate.

(*) Le piccole dimensioni a cui abbiamo ridotto, per la riproduzione, il disegno originale dalla figura precedente, non ha fatto sembrare opportuno di far comparire nella figura stessa la suddetta spezzata.

Dalla figura riportata si vede che possiamo assumere

$$\beta = 20, \gamma = 54, \delta = 75, A_1 = 4,5, A_2 = 6,5, A_3 = 25.$$

Per determinare poi σ_1, σ_2 e σ_3 , ricordiamo che per $t = \frac{x}{\sigma} > 3$ i valori delle ordinate di una curva gaussiana sono poco apprezzabili; se osserviamo allora che gli intervalli menzionati nella 3^a condizione detta sono rispettivamente 56, 42 e 50, possiamo assumere $\sigma_1 = 10, \sigma_2 = 7,5$ e $\sigma_3 = 8,5$.

Si è ottenuta così la seguente equazione per rappresentare la curva di Lexis.

$$(IX^*) \quad y = \frac{1350}{(3x + 2)^2} + 4,5 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-28}{10} \right)^2} + 6,5 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-54}{7,5} \right)^2} + \\ + 25 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-75}{8,5} \right)^2}$$

dalla quale risulta che il numero dei morti fra 0 e 100 anni proveniente dalla generazione fittizia considerata sarebbe

$$N = \int_0^{100} y dx = 990,27.$$

Dalle citate tavole di mortalità risulterebbe invece $N = 999,97$. La poca approssimazione tra questi due numeri non reca, come già è stato sopra riferito, alcun pregiudizio alla nostra ricerca.

Determinati i parametri della (IX), si è fissata la scala di misura sulle ascisse rappresentando ogni anno con 8 mm. di modo che l'intervallo totale (x_0, x_n) sia uguale a 80 cm.

Per fissare poi l'unità di misura sulle ordinate bisogna tener presente che le frequenze relative alle piccole età, sono molto grandi rispetto a quelle delle altre età. In considerazione, allora, delle dimensioni dei nostri fogli di carta da disegno, abbiamo creduto opportuno sacrificare il ramo alto della curva, pur di avere tutto il resto della curva notevolmente staccato dall'asse x .

Come unità di misura si è perciò presa la lunghezza 15 mm. per ogni morto. La rappresentazione grafica della (IX*) è data dalla linea piena nei grafici 21, 22 e 23.

Riepilogando: le equazioni dei nove tipi di curve, con i rispettivi

intervalli in cui varia la x , e le corrispondenti scale di misura adoperate sull'asse delle ascisse e delle ordinate, sono :

| | Unità sulle ascisse eguale cm. | Unità sulle ordinate eguale mm. |
|---------------------|---|---|
| (I*) | $y = 1000 \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{x}{12}\right)^6$ | $-2 \leq x \leq 12$, 2,5 , 0,5 |
| (II*) | $y = 1000 \left(1 - \frac{x^2}{7^2}\right)^4$ | $-7 \leq x \leq 7$, » , » |
| (III*) | $y = 1000 \left(1 + \frac{x}{3}\right) e^{-x}$ | $-3 \leq x \leq 13$, » , » |
| (IV ₁ *) | $y = 848,99 (1 + 4x^2)^{-3/2} e^{-\arctg 2x}$ | $-8 \leq x \leq 4$, » , » |
| (IV ₂ *) | $y = 848,99 (1 + x^2)^{-3/2} e^{-\arctg x}$ | $-10 \leq x \leq 4$, 5 , » |
| (V*) | $y = 2,4556 \cdot 10^7 \cdot x^{-4} e^{-\frac{18,42068}{x}}$ | $0 \leq x \leq 30$, 2 , » |
| (VI*) | $y = 1,10751 \cdot 10^{10} \cdot (x - 1)^{30} x^{-36}$ | $1 \leq x < 21$, » , » |
| (VII*) | $y = 1000 e^{-\frac{x^2}{32}}$ | $-15 \leq x \leq 15$, » , » |
| (VIII*) | $y = \frac{1000}{x^{2,5}}$ | $1 \leq x \leq 4$, 25 , » |
| (IX*) | $y = \frac{1350}{(3x + 2)^2} + 4,5 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-28}{10}\right)^2} + 6,5 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-54}{7,5}\right)^2} +$ $+ 25 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-75}{8,5}\right)^2}$ | $0 < x < 100$, 0,8 , 15. |

§ 6. — Determinazione degli istogrammi.

La conoscenza della funzione $y = f(x)$, rappresentatrice di una curva, permette di determinare l'area racchiusa tra la curva, l'asse x e le ordinate negli estremi di un qualunque intervallo $(x_i - 1, x_i)$ purchè si sappia calcolare

$$A_i = \int_{x_i - 1}^{x_i} f(x) dx ,$$

possibilità che esiste per tutti i tipi di curve considerati.

Indicata con $F(x)$ la funzione primitiva di $f(x)$, si ha, evidentemente,

$$(2) \quad A_i = F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Se dividiamo l'intervallo (x_0, x_n) di variabilità della x in un modo qualsiasi in intervalli parziali (x_{i-1}, x_i) , ($i = 1, 2, \dots, n$), e calcoliamo i corrispondenti valori A_i , possiamo costruire sul foglio da disegno, con la stessa scala adoperata per costruire il diagramma della data equaz. $y = f(x)$, un istogramma, tale che l'area racchiusa da tutti i suoi elementi sia precisamente eguale all'area racchiusa, nell'intervallo (x_0, x_n) , tra la curva e l'asse x .

Facciamo notare che, per economia di calcoli, le ascisse dei punti x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) di divisione dell'intervallo totale in intervalli parziali hanno valori interi per tutte le curve ad eccezione di quella dei redditi.

Riteniamo opportuno esporre i calcoli effettivamente eseguiti in corrispondenza ai vari tipi, per determinare $F(x)$ e le altezze degli elementi di ciascun istogramma da interpolare.

a) Per integrare la (I*) si osservi che sviluppando il prodotto

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{x}{12}\right)^6,$$

ne segue che

$$\begin{aligned} F(x) &= 1000 \int \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{x}{12}\right)^6 dx = \\ &= 1000 \left(x - \frac{7}{12^2} x^3 + \frac{35}{2 \cdot 12^3} x^4 - \frac{21}{12^4} x^5 + \frac{14}{12^5} x^6 - \frac{5}{12^6} x^7 + \frac{3}{4 \cdot 12^7} x^8 \right) = \\ &= \frac{1000}{12^8} (12^8 x - 7 \cdot 12^6 x^3 + 35 \cdot 6 \cdot 12^4 x^4 - 21 \cdot 12^4 x^5 + 14 \cdot 12^3 x^6 - \\ &\quad - 5 \cdot 12^2 x^7 + 9 x^8) \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} F(-2) &= -\frac{1000}{12^8} 607 \cdot 497 \cdot 984 & F(1) &= \frac{1000}{12^8} 413 \cdot 022 \cdot 393 \\ F(-1) &= -\frac{1000}{12^8} 404 \cdot 264 \cdot 871 & F(2) &= \frac{1000}{12^8} 749 \cdot 945 \cdot 088 \\ F(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(3) &= \frac{1000}{12^8} 988 \cdot 618 \cdot 041 & F(8) &= \frac{1000}{12^8} 1 \cdot 288 \cdot 175 \cdot 616 \\
 F(4) &= \frac{1000}{12^8} 1 \cdot 138 \cdot 950 \cdot 144 & F(9) &= \frac{1000}{12^8} 1 \cdot 289 \cdot 689 \cdot 209 \\
 F(5) &= \frac{1000}{12^8} 1 \cdot 223 \cdot 238 \cdot 105 & F(10) &= \frac{1000}{12^8} 1 \cdot 289 \cdot 928 \cdot 960 \\
 F(6) &= \frac{1000}{12^8} 1 \cdot 264 \cdot 750 \cdot 848 & F(11) &= \frac{1000}{12^8} 1 \cdot 289 \cdot 944 \cdot 953 \\
 F(7) &= \frac{1000}{12^8} 1 \cdot 282 \cdot 210 \cdot 713 & F(12) &= \frac{1000}{12^8} 1 \cdot 289 \cdot 945 \cdot 088.
 \end{aligned}$$

Applicando la (2) si ha l'area di ogni elemento di istogramma di base unitaria, e queste aree misurano anche — essendo la base di ogni elemento eguale ad una unità — l'altezza di ogni elemento di un istogramma da rappresentarsi sul foglio di carta millimetrata, servendosi della scala di misura sull'ordinata fissata nel paragrafo precedente.

Le dette altezze sono riportate nella seguente tabella dove è anche indicato l'intervallo sul quale è situato il corrispondente elemento di istogramma.

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|----------|
| -2 , -1 | 472,65 | 3 , 4 | 349,62 | 8 , 9 | 3,52 |
| -1 , 0 | 940,19 | 4 , 5 | 196,03 | 9 , 10 | 0,56 |
| 0 , 1 | 960,56 | 5 , 6 | 96,55 | 10 , 11 | 0,04 (*) |
| 1 , 2 | 783,57 | 6 , 7 | 40,61 | 11 , 12 | 0,00 (*) |
| 2 , 3 | 555,08 | 7 , 8 | 13,87 | — | — |

(*) È chiaro che questi due ultimi elementi di istogramma non sono apprezzabili nella rappresentazione grafica, onde arrestiamo l'interpolazione al punto $x = 10$.

Le medie delle coppie successive di questi numeri costituiscono, evidentemente, le altezze dei rettangoli di un istogramma con elementi

di base doppia di quella considerata precedentemente e che sono riportate nella tabella seguente.

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| -2 , 0 | 706,42 | 4 , 6 | 146,29 | 10 , 12 | 0,02 |
| 0 , 2 | 872,07 | 6 , 8 | 27,24 | — | — |
| 2 , 4 | 452,35 | 8 , 10 | 2,04 | — | — |

Per questo primo tipo di curve, di andamento abbastanza uniforme, abbiamo costruito due soli istogrammi da sottoporre a interpolazione grafica, formati, rispettivamente, da elementi con base di 1 e di 2 unità di ampiezza.

b) L'integrale del secondo membro della (II*) si ottiene subito sviluppando $\left(1 - \frac{x^2}{7^2}\right)^4$, perchè allora si ha

$$F(x) = 1000 \int \left(1 - \frac{x^2}{7^2}\right)^4 dx =$$

$$= -\frac{1000}{7^8} \left(7^8 x - 4 \cdot 7^6 \frac{x^3}{3} + 6 \cdot 7^4 \frac{x^5}{5} - 4 \cdot 7^2 \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}\right),$$

e da questa si ricava:

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = \frac{1000}{45 \cdot 7^8} 252 \cdot 485 \cdot 504 = -F(-1)$$

$$F(2) = \frac{1000}{45 \cdot 7^8} 466 \cdot 350 \cdot 778 = -F(-2)$$

$$F(3) = \frac{1000}{45 \cdot 7^8} 616 \cdot 505 \cdot 472 = -F(-3)$$

$$F(4) = \frac{1000}{45 \cdot 7^8} 699 \cdot 324 \cdot 596 = -F(-4)$$

$$F(5) = \frac{1000}{45 \cdot 7^8} 731 \cdot 209 \cdot 600 = -F(-5)$$

$$F(6) = \frac{1000}{45 \cdot 7^8} 737 \cdot 623 \cdot 854 = -F(-6)$$

$$F(7) = \frac{1000}{45 \cdot 7^8} 737 \cdot 894 \cdot 528 = -F(-7)$$

Applicando la (2) successivamente, si ottengono le aree e quindi le altezze, qui appresso indicate, degli elementi di istogramma costruiti su basi di ampiezza unitaria.

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|--------------------|---------|--------------------|---------|
| -7, -6 oppure 6, 7 | 1,04 | -3, -2 oppure 2, 3 | 578,82 |
| -6, -5 » 5, 6 | 24,72 | -2, -1 » 1, 2 | 824,41 |
| -5, -4 » 4, 5 | 122,91 | -1, 0 » 0, 1 | 973,28 |
| -4, -3 » 3, 4 | 319,25 | — | — |

Da queste si deducono subito le altezze degli elementi di base 2 e di base 3 :

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|--------------------|---------|--------------------|---------|
| -7, -5 oppure 5, 7 | 12,89 | -3, -1 oppure 1, 3 | 701,62 |
| -5, -3 » 3, 5 | 221,08 | -1, , 1 | 973,28 |
| -7, -4 | 49,89 | -1, , 2 | 923,66 |
| -4, -1 | 574,16 | 2, , 5 | 340,36 |

Come materiale da sottoporre a interpolazione si sono costruiti tre istogrammi di cui due simmetrici, e aventi gli elementi con la base rispettivamente di 1 e di 2 unità, e il terzo asimmetrico con elementi aventi la base di 3 unità di ampiezza.

c) L'integrazione della

$$f(x) = 1000 \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 e^{-x} = \frac{1000}{27} (3+x)^3 e^{-x}$$

si opera sviluppando prima $(3 + x)^3$ e poi integrando per parti i termini che sono della forma

$$\int x^i e^{-x} dx \quad (i = 1, 2, 3).$$

Si ottiene così

$$F(x) = \int f(x) dx = -\frac{1000}{27} [(x+4)^3 + 3x + 14] e^{-x}.$$

Calcolando i valori di $F(-3)$, $F(-2)$, ..., $F(12)$, $F(13)$, e applicando poi la (2), si ricavano le altezze sotto indicate degli elementi di istogramma costruiti su ciascun intervallo di ampiezza unitaria:

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| -3, -2 | 82,60 | 3, 4 | 309,93 | 9, 10 | 5,49 |
| -2, -1 | 552,97 | 4, 5 | 175,80 | 10, 11 | 2,57 |
| -1, 0 | 936,87 | 5, 6 | 94,42 | 11, 12 | 1,18 |
| 0, 1 | 954,11 | 6, 7 | 48,61 | 12, 13 | 0,53 |
| 1, 2 | 751,81 | 7, 8 | 24,19 | — | — |
| 2, 3 | 508,08 | 8, 9 | 11,76 | — | — |

e le altezze degli elementi di base 2:

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| -3, -1 | 317,80 | 3, 5 | 242,86 | 9, 11 | 4,03 |
| -1, 1 | 945,00 | 5, 7 | 71,51 | 11, 13 | 0,85 |
| 1, 3 | 629,94 | 7, 9 | 17,97 | — | — |

Per aver modo di constatare il diverso grado di esattezza ottenuta da operatori diversi nell'interpolazione degli stessi istogrammi, si sono costruiti, per questo tipo di curve, quattro istogrammi a due a due uguali ed aventi rispettivamente per base elementi di ampiezza di una e di due unità.

d) Passando al IV tipo, ricordiamo che le due equazioni (IV₁*) e (IV₂*) si deducono l'una dall'altra cambiando $2x$ in x , e perciò le

rispettive funzioni primitive $F_1(x)$ ed $F_2(x)$ saranno legate dalla relazione

$$(3) \quad F_1(x) = \frac{1}{2} F_2(2x) \quad (*).$$

Determiniamo l'espressione di $F_2(x)$ che è più semplice.

Mediante l'integrazione per parti del secondo membro della (IV₂*), trascurando per ora il fattore numerico 848,99, prendendo $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ come fattore finito e $d e^{-\operatorname{arctg} x} = \frac{-e^{-\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2}$ come fattore differenziale, si ha

$$\begin{aligned} \bar{F}_2(x) = \int (1+x^2)^{-3/2} e^{-\operatorname{arctg} x} dx = & - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\operatorname{arctg} x} - \\ & - \int e^{-\operatorname{arctg} x} x (1+x^2)^{-3/2} dx, \end{aligned}$$

e con lo stesso procedimento si ha ancora

$$\begin{aligned} \int e^{-\operatorname{arctg} x} x (1+x^2)^{-3/2} dx = & -x (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\operatorname{arctg} x} + \\ & + \int e^{-\operatorname{arctg} x} (1+x^2)^{-3/2} dx, \end{aligned}$$

per cui

$$\bar{F}_2(x) = \frac{1}{2} [x (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\operatorname{arctg} x} - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\operatorname{arctg} x}],$$

e da questa si ricava

$$F_2(x) = \frac{848,99}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} (x-1) e^{-\operatorname{arctg} x},$$

che possiamo trasformare, per comodità dei calcoli successivi, tenendo conto della (IV₂*), nella

$$F_2(x) = \frac{1}{2} y (1+x^2) (x-1).$$

Facendo allora le differenze $F_2(x_i+1) - F_2(x_i)$ per $x_i = -10$,

(*) Infatti, indicando con $f(x)$ il secondo membro della (IV₂*), si ha

$$F_1(x) = \int f(2x) dx = \frac{1}{2} \int f(2x) d2x = \frac{1}{2} F_2(2x).$$

— 9, , 2, 3, troviamo le seguenti altezze degli elementi con base unitaria di un istogramma relativo all'equazione (IV_2^*) :

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| -10 , -8 | 4,23 | -5 , -4 | 34,15 | 0 , 1 | 424,48 |
| -9 , -8 | 5,83 | -4 , -3 | 65,91 | 1 , 2 | 62,72 |
| -8 , -7 | 8,32 | -3 , -2 | 148,66 | 2 , 3 | 14,24 |
| -7 , -6 | 12,45 | -2 , -1 | 406,98 | 3 , 4 | 5,07 |
| -6 , -5 | 19,80 | -1 , 0 | 892,16 | — | — |

e per gli istogrammi con elementi di base 2 :

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| -10 , -9 | 5,03 | -4 , -2 | 107,28 | 2 , 4 | 9,65 |
| -8 , -6 | 10,39 | -2 , 0 | 649,57 | — | — |
| -6 , -4 | 26,97 | 0 , 2 | 243,60 | — | — |

Per la curva (IV_2^*) si sono costruiti quattro istogrammi di cui due identici fra loro con elementi di base unitaria, e gli altri due pure identici fra loro, ma formati da elementi con base di 2 unità.

Da l'espressione di $F_2(x)$ si ottiene, per la (3), l'integrale del secondo membro della (IV_1^*), cioè

$$F_1(x) = \frac{1}{4} y(1 + 4x^2)(2x - 1).$$

Da questa si calcolano, nel solito modo, per questo tipo di curve, le altezze degli elementi di istogramma aventi la base 1. Si trovano i seguenti valori :

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| -8 , -7 | 1,36 | -4 , -3 | 10,39 | 0 , 1 | 243,60 |
| -7 , -6 | 1,46 | -3 , -2 | 26,97 | 1 , 2 | 9,65 |
| -6 , -5 | 2,85 | -2 , -1 | 107,28 | 2 , 3 | 1,67 |
| -5 , -4 | 5,03 | -1 , 0 | 649,57 | 3 , 4 | 0,60 |

e da essi si ricavano le altezze degli elementi con base di ampiezza 2 :

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| -8 , -6 | 1,41 | 0 , 2 | 126,62 | -3 , -1 | 67,12 |
| -6 , -4 | 3,94 | .2 , 4 | 1,14 | -1 , 1 | 446,58 |
| -4 , -2 | 18,68 | -7 , -5 | 2,15 | 1 , 3 | 5,66 |
| -2 , 0 | 378,43 | -5 , -3 | 7,71 | — | — |

Gli istogrammi costruiti sono stati quattro : i primi due identici e con elementi di ampiezza uno ; il terzo corrisponde alla divisione dell'intervallo totale (— 8, 4) in intervalli parziali di ampiezza due, simmetricamente posti rispetto al punto di ascissa zero ; il quarto, infine, pure formato da elementi con base di ampiezza due, ma poggiati su intervalli scelti in modo che il punto zero cada nel centro di uno di essi.

e) Il calcolo dell'integrale

$$\int \left(\frac{1}{x} \right)^4 e^{-\frac{\gamma}{x}} dx$$

relativo al quinto tipo di curve del Pearson si ottiene facendo dapprima la sostituzione

$$\frac{1}{x} = z \quad \left(\text{per cui } dx = -\frac{1}{z^2} dz \right),$$

in modo da trasformarlo in

$$-\int z^2 e^{-\gamma z} dz = -\frac{1}{\gamma^3} \int t^2 e^{-t} dt, \quad (t = \gamma z)$$

e adoperando poi l'integrazione per parti sia a questo integrale, sia a quello che risulta da questa operazione. Si ricava :

$$F(x) = \frac{\gamma_0}{\gamma^3} \left[\left(\frac{\gamma}{x} + 1 \right)^2 + 1 \right] e^{-\frac{\gamma}{x}}.$$

Sostituendo per γ_0 e γ rispettivamente i valori 24.556.157 e 18,420 68 trovati nel paragrafo precedente, e adoperando la (2) si

ricavano le altezze, indicate nella seguente tabella, degli elementi con base unitaria :

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| 0 , 1 | 0,01 | 10 , 11 | 350,29 | 20 , 21 | 56,67 |
| 1 , 2 | 41,34 | 11 , 12 | 283,55 | 21 , 22 | 48,85 |
| 2 , 3 | 398,63 | 12 , 13 | 230,85 | 22 , 23 | 42,30 |
| 3 , 4 | 833,61 | 13 , 14 | 189,25 | 23 , 24 | 36,80 |
| 4 , 5 | 990,31 | 14 , 15 | 156,22 | 24 , 25 | 32,16 |
| 5 , 6 | 939,26 | 15 , 16 | 129,87 | 25 , 26 | 28,23 |
| 6 , 7 | 808,74 | 16 , 17 | 108,65 | 26 , 27 | 24,86 |
| 7 , 8 | 666,37 | 17 , 18 | 91,50 | 27 , 28 | 22,00 |
| 8 , 9 | 539,61 | 18 , 19 | 77,56 | 28 , 29 | 19,52 |
| 9 , 10 | 434,51 | 19 , 20 | 66,12 | 29 , 30 | 17,37 |

Oltre ad un istogramma con elementi di base unitaria, si sono costruiti altri due istogrammi identici formati da elementi con base di ampiezza 2, le cui altezze sono espresse dai numeri :

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| 0 , 2 | 20,67 | 10 , 12 | 316,91 | 20 , 22 | 52,76 |
| 2 , 4 | 617,12 | 12 , 14 | 210,05 | 22 , 24 | 39,55 |
| 4 , 6 | 964,78 | 14 , 16 | 143,05 | 24 , 26 | 30,20 |
| 6 , 8 | 737,35 | 16 , 18 | 100,07 | 26 , 28 | 23,43 |
| 8 , 10 | 487,06 | 18 , 20 | 71,84 | 28 , 30 | 18,45 |

f) Per calcolare l'integrale

$$\int (x - 1)^{30} x^{-36} dx ,$$

relativo alla curva del tipo VI da noi presa in considerazione, poniamo

$$t = \frac{1}{x} \left(\text{per cui } x - 1 = \frac{1-t}{t} \text{ e } dx = -\frac{1}{t^2} dt \right) ;$$

si ha allora

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= \int (x - 1)^{30} x^{-36} dx = - \int \left(\frac{1-t}{t} \right)^{30} t^{36} t^{-2} dt = \\ &= - \int (1-t)^{30} t^4 dt = \frac{1}{31} \int t^4 d(1-t)^{31} . \end{aligned}$$

Applicando il metodo d'integrazione per parti si ha la seguente formula ricorrente:

$$(4) \quad \int t^p d(1-t)^q = t^p (1-t)^q - p \int t^{p-1} (1-t)^q dt = \\ = t^p (1-t)^q + \frac{p}{q+1} \int t^{p-1} d(1-t)^{q+1}$$

che permette di far diminuire, successivamente di una unità, l'esponente del fattore t nella funzione da integrare, fino ad ottenere

$$\int (1-t)^{q+p-1} dt = - \frac{(1-t)^{p+q}}{p+q}.$$

Nel nostro caso è $p=4$, $q=31$ e perciò, dopo aver applicato per quattro volte successive la (4) ed eseguito tutte le sostituzioni, si ricava

$$F(x) = 10^{10} \cdot 1,10751 \int (x-1)^{30} x^{-36} dx = \\ = 10^{10} \cdot 1,10751 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{35} \left[\frac{1}{31} (x-1)^{-4} + \frac{4}{31 \cdot 32} (x-1)^{-3} + \right. \\ \left. + \frac{4 \cdot 3}{31 \cdot 32 \cdot 33} (x-1)^{-2} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34} (x-1)^{-1} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35} \right].$$

Se calcoliamo i valori di $F(x)$ per $x=1, 2, \dots, 21$, ricaviamo, per differenza, i seguenti valori delle altezze:

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| 1, 2 | 0,01 | 8, 9 | 687,81 | 15, 16 | 108,32 |
| 2, 3 | 19,98 | 9, 10 | 536,82 | 16, 17 | 84,50 |
| 3, 4 | 259,80 | 10, 11 | 411,55 | 17, 18 | 66,17 |
| 4, 5 | 699,27 | 11, 12 | 313,57 | 18, 19 | 52,24 |
| 5, 6 | 960,85 | 12, 13 | 238,61 | 19, 20 | 41,62 |
| 6, 7 | 972,66 | 13, 14 | 182,50 | 20, 21 | 33,39 |
| 7, 8 | 848,86 | 14, 15 | 139,92 | — | — |

Per la curva del tipo VI, così come per quella di tipo V, oltre a un istogramma con base di una unità, si sono costruiti altri due isto-

grammi identici, i cui elementi, con base di 2 unità, sono determinati dalle seguenti altezze :

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| 1 , 3 | 10 | 9 , 11 | 474,19 | 17 , 19 | 59,21 |
| 3 , 5 | 479,54 | 11 , 13 | 276,09 | 19 , 21 | 37,51 |
| 5 , 7 | 966,76 | 13 , 15 | 161,21 | — | — |
| 7 , 9 | 768,84 | 15 , 17 | 96,43 | — | — |

g) Il calcolo dei valori della funzione

$$F(x) = 1000 \int_0^x e^{-\frac{x^2}{32}} dx,$$

per $x = 0, 1, 2, \dots, 15$, si ottiene facilmente dopo aver cambiato la variabile x nella $t = \frac{x}{4}$. La $F(x)$ si trasforma allora nella

$$F(t) = 4000 \sqrt{2\pi} \int_0^t \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

speditamente calcolabile per mezzo delle tavole di Sheppard, che dà i valori dell'integrale del secondo membro per t variabile di centesimo in centesimo. Si ottengono così le altezze degli elementi di istogramma aventi l'ampiezza della base di una unità :

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|-----------------------|---------|---------------------------|---------|
| 0 , 1 oppure 0 , -1 | 989,68 | 8 , 9 oppure -8 , -9 | 105,54 |
| 1 , 2 » -1 , -2 | 930,02 | 9 , 10 » -9 , -10 | 60,30 |
| 2 , 3 » -2 , -3 | 821,27 | 10 , 11 » -10 , -11 | 32,39 |
| 3 , 4 » -3 , -4 | 681,53 | 11 , 12 » -11 , -12 | 16,34 |
| 4 , 5 » -4 , -5 | 531,46 | 12 , 13 » -12 , -13 | 7,75 |
| 5 , 6 » -5 , -6 | 389,45 | 13 , 14 » -13 , -14 | 3,45 |
| 6 , 7 » -6 , -7 | 268,19 | 14 , 15 » -14 , -15 | 1,45 |
| 7 , 8 » -7 , -8 | 173,55 | — | — |

Col solito procedimento si ottengono le altezze degli elementi aventi la base di 2 unità:

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|--------------------|---------|--------------------|---------|
| -1, 1 | 989,68 | 7, 9 oppure -7, -9 | 139,55 |
| 1, 3 oppure -1, -3 | 875,65 | 9, 11 » -9, -11 | 46,35 |
| 3, 5 » -3, -5 | 606,50 | 11, 13 » -11, -13 | 12,05 |
| 5, 7 » -5, -7 | 328,82 | 13, 15 » -13, -15 | 2,45 |

Analogamente per avere le altezze degli elementi con base 3, basta evidentemente considerare i tre intervalli di 1 unità che rientrano nella base di ciascun elemento, e fare la media delle altezze dei tre elementi poggiati sui detti intervalli unitari. Si ottengono così i seguenti valori delle altezze:

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| -14, -11 | 9,18 | -5, -2 | 678,08 | 4, 7 | 396,37 |
| -11, -8 | 66,08 | -2, 1 | 969,79 | 7, 10 | 113,13 |
| -8, -5 | 227,06 | 1, 4 | 810,94 | 10, 13 | 18,83 |

Gli istogrammi costruiti per questo tipo di curve sono stati tre: uno simmetrico formato da elementi di base 2, e gli altri due identici, non simmetrici, i cui elementi hanno la base di 3 unità.

h) Nota l'equazione

$$y = \frac{1000}{x^{2,5}}$$

di una curva dei redditi della prima forma, secondo Pareto, si determina subito, per ogni intervallo (x_{i-1}, x_i) l'area di ogni elemento di istogramma corrispondente alla detta curva.

Infatti

$$A_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1000}{x^{2,5}} dx = \left[-\frac{1000}{1,5 x \sqrt{x}} \right]_{x_{i-1}}^{x_i}.$$

Si è così costruito, per le curve di questo tipo, un istogramma formato da elementi con base di ampiezza un quinto di unità le cui altezze sono :

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| 1 , 1.2 | 797,58 | 2 , 2.2 | 157,00 | 3 , 3.2 | 59,19 |
| 1.2 , 1.4 | 523,49 | 2.2 , 2.4 | 124,99 | 3.2 , 3.4 | 50,62 |
| 1.4 , 1.6 | 365,25 | 2.4 , 2.6 | 101,43 | 3.4 , 3.6 | 43,68 |
| 1.6 , 1.8 | 266,73 | 2.6 , 2.8 | 83,65 | 3.6 , 3.8 | 38,02 |
| 1.8 , 2 | 201,78 | 2.8 , 3 | 69,95 | 3.8 , 4 | 33,33 |

Inoltre si è costruito un istogramma formato da elementi con base di ampiezza due quinti di unità e con le altezze sotto indicate :

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| 1 , 1.2 | 797,58 | 2 , 2.4 | 141,00 | 3.2 , 3.6 | 47,15 |
| 1.2 , 1.6 | 444,37 | 2.4 , 2.8 | 92,58 | 3.6 , 4 | 35,7 |
| 1.6 , 2 | 234,25 | 2.8 , 3.2 | 64,67 | — | — |

i) Poniamo nel secondo membro della (IX*)

$$x_1 = \frac{x - 28}{10} , \quad x_2 = \frac{x - 54}{7,5} , \quad x_3 = \frac{x - 75}{8,5}$$

e moltiplichiamo i coefficienti 4,5 , 6,5, 25 per un valore approssimato di $\sqrt{2\pi}$, in modo da scriverlo

$$\frac{1350}{(3x + 2)^2} + 11,280 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \right) + 16,293 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} \right) + \\ + 62,666 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_3^2}{2}} \right).$$

In esso i valori dei tre termini corrispondenti alle curve di tipo gaussiano, come pure i valori dei loro integrali definiti, sono dati dalle

tavole citate al paragrafo precedente. Anche l'integrale del primo termine si ottiene subito; difatti è:

$$\int \frac{1350}{(3x+2)^2} dx = -\frac{1350}{3(3x+2)}.$$

Facendo allora la somma dei valori dei detti 4 integrali definiti, per x variabile in ciascuno degli intervalli (x_{i-1}, x_i) , ($i = 1, 2, \dots, n$), in cui si è diviso l'intervallo totale (0, 100) di variabilità della x , si ottiene l'area racchiusa dalla curva e l'asse x nell'intervallo (x_{i-1}, x_i) . In tal modo si sono costruiti tre istogrammi di cui il primo ha gli elementi con la base di ampiezza 5 unità e aventi perciò le altezze:

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| 0 , 5 | 39,95 | 35 , 40 | 3,58 | 70 , 75 | 24,08 |
| 5 , 10 | 3,05 | 40 , 45 | 3,75 | 75 , 80 | 23,76 |
| 10 , 15 | 2,27 | 45 , 50 | 5,38 | 80 , 85 | 16,92 |
| 15 , 20 | 3,06 | 50 , 55 | 7,32 | 85 , 90 | 8,52 |
| 20 , 25 | 4,13 | 55 , 60 | 9,06 | 90 , 95 | 3,19 |
| 25 , 30 | 4,65 | 60 , 65 | 12,00 | 95 , 100 | 0,84 |
| 30 , 35 | 4,29 | 65 , 70 | 18,25 | — | — |

Il secondo istogramma è stato ottenuto assumendo come base dei singoli elementi la lunghezza di 7,5 unità, e perciò le altezze sono:

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| 0 , 7,5 | 27,85 | 37,5 , 45 | 3,65 | 75 , 82,5 | 22,11 |
| 7,5 , 15 | 2,33 | 45 , 52,5 | 5,87 | 82,5 , 90 | 10,69 |
| 15 , 22,5 | 3,33 | 52,5 , 60 | 8,63 | 90 , 97,5 | 2,52 |
| 22,5 , 30 | 4,55 | 60 , 67,5 | 13,58 | — | — |
| 30 , 37,5 | 4,10 | 67,5 , 75 | 22,64 | — | — |

Infine il terzo istogramma è formato da elementi con base di 10 unità e aventi quindi le altezze:

| Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza | Intervallo | Altezza |
|------------|---------|------------|---------|------------|---------|
| 5 , 15 | 2,66 | 35 , 45 | 3,67 | 65 , 75 | 21,17 |
| 15 , 25 | 3,59 | 45 , 55 | 6,35 | 75 , 85 | 20,34 |
| 25 , 35 | 4,47 | 55 , 65 | 10,53 | 85 , 95 | 5,86 |

A complemento di questo paragrafo diamo il seguente prospetto riassuntivo che indica, per ciascun tipo di curva, tutti gli istogrammi costruiti, il loro numero d'ordine, e l'ampiezza sia in unità sia in centimetri, secondo la scala di misura fissata nel paragrafo precedente, della base di ogni elemento.

ISTOGRAMMI COSTRUITI DISTINTI SECONDO IL TIPO DI CURVA.

| Tipo di curva | Numero de l'istogramma | Ampiezza della base di ogni elemento | | Tipo di curva | Numero de l'istogramma | Ampiezza della base di ogni elemento | |
|-------------------|------------------------|--------------------------------------|--------|---------------|------------------------|--------------------------------------|--------|
| | | in unità | in cm. | | | in unità | in cm. |
| I | I | I | 2,5 | V | 18 | I | 2 |
| | 2 | 2 | 5 | | 19 | 2 | 4 |
| II | 3 | I | 2,5 | | 20 | 2 | 4 |
| | 4 | 2 | 5 | VI | 21 | I | 2 |
| | 5 | 3 | 7,5 | | 22 | 2 | 4 |
| III | 6 | I | 2,5 | | 23 | 2 | 4 |
| | 7 | I | 2,5 | VII | 24 | 2 | 4 |
| | 8 | 2 | 5 | | 25 | 3 | 6 |
| IV ₁ * | 9 | 2 | 5 | | 26 | 3 | 6 |
| | 10 | I | 2,5 | R | 27 | 1/5 | 5 |
| | 11 | I | 2,5 | | 28 | 2/5 | 10 |
| IV ₂ * | 12 | 2 | 5 | L | 29 | 5 | 4 |
| | 13 | 2 | 5 | | 30 | 7,5 | 6 |
| | 14 | I | 5 | | 31 | 10 | 8 |
| | 15 | I | 5 | | | | |
| | 16 | 2 | 10 | | | | |
| | 17 | 2 | 10 | | | | |

(*) Le curve corrispondenti alle due equazioni (IV₁*) e (IV₂*) hanno l'aspetto molto differente tanto che è bene considerarle separatamente ; ambedue però appartengono al tipo IV del Pearson. Le distinguiamo tuttavia con i simboli IV₁ e IV₂ per esprimere in forma comoda e facile che le due curve prese come fondamentali hanno aspetto diverso.

§ 7. — Operatori dell'interpolazione.

Nel § 3 del capitolo 1 si è detto quale importanza abbia la scelta dell'operatore per l'interpolazione grafica di istogrammi. Egli, infatti, nel tracciare la curva interpolatrice, segue un criterio sogget-

tivo, suggerito e dal colpo d'occhio e dalla sua conoscenza delle curve che ricorrono spesso nella statistica, e, in genere, dalla sua preparazione teorica e pratica in disegno. Per giudicare quindi il risultato di una interpolazione grafica, non dobbiamo prescindere dall'esaminare quale preparazione e quale esperienza abbia l'operatore che la esegue.






I 31 istogrammi di cui al § 6 sono stati dati a interpolare ad otto disegnatori, precedentemente sottoposti ad un breve periodo di addestramento. Ma, in effetto, 26 istogrammi sono stati dati a soli quattro disegnatori (10 istogrammi al disegnatore che indicheremo con la lettera *A*, 7 al disegnatore *B*, 5 al *C*, e 4 al *D*). Questi 4 disegnatori presentavano fra loro preparazione differente: il primo, diplomato di una scuola di Belle Arti e perciò con una buona preparazione nell'arte del disegno; il secondo invece, un pratico, più dedito alla pittura che al disegno geometrico e quindi abituato a giudicare molto a colpo d'occhio; il terzo con una buona conoscenza di disegno architettonico; il quarto, infine, un ingegnere con scarsa conoscenza pratica dei grafici di uso comune nella tecnica statistica. Queste poche nozioni sulla preparazione dei quattro principali operatori saranno utili per spiegare certi difetti delle curve interpolatrici. Indicheremo gli altri 4 operatori con le lettere *E*, *F*, *G*, e *H*.

Il prospetto seguente riporta la distribuzione degli istogrammi, distinti secondo l'interpolatore.

| Numero d'ordine | Tipo di curva | Numero de l'istogramma | Ampiezza della base di ogni elemento | Numero d'ordine | Tipo di curva | Numero de l'istogramma | Ampiezza della base di ogni elemento |
|----------------------|------------------|------------------------------|---|---|----------------------|------------------------------|---|
| Disegnatore <i>A</i> | | | | Disegnatore <i>C</i> | | | |
| 1 | I | 1 | 1 | 18 | III | 9 | 2 |
| 2 | II | 5 | 3 | 19 | IV ₁ | 11 | 1 |
| 3 | III | 8 | 2 | 20 | IV ₂ | 17 | 2 |
| 4 | IV ₁ | 12 | 2 | 21 | V | 19 | 2 |
| 5 | IV ₂ | 14 | 1 | 22 | VII | 26 | 3 |
| 6 | V | 18 | 1 | | | | |
| 7 | » | 20 | 2 | | Disegnatore <i>D</i> | | |
| 8 | VI | 21 | 1 | 23 | I | 2 | 2 |
| 9 | <i>R</i> | 28 | 2/5 | 24 | III | 7 | 1 |
| 10 | <i>L</i> | 29 | 5 | 25 | VI | 23 | 2 |
| | | | | 26 | VII | 25 | 3 |
| Disegnatore <i>B</i> | | | | Disegnatori <i>E</i> , <i>F</i> , <i>G</i> e <i>H</i> | | | |
| 11 | II | 3 | 1 | | IV ₁ | 13 | 2 |
| 12 | » | 4 | 2 | 27 | IV ₂ | 16 | 2 |
| 13 | III | 6 | 1 | 28 | VI | 22 | 2 |
| 14 | IV ₁ | 10 | 1 | 29 | <i>L</i> | 30 | 7.5 |
| 15 | IV ₂ | 15 | 1 | 30 | » | 31 | 10 |
| 16 | VII | 24 | 2 | 31 | | | |
| 17 | <i>R</i> | 27 | 1/5 | | | | |

Per giudicare, sia pure approssimativamente, l'attitudine di ciascuno dei detti disegnatori in questo genere di lavoro, si sono fatti interpolare gli istogrammi, identici o diversi, di uno stesso tipo di curve da operatori differenti, ad eccezione di una coppia di istogrammi per il tipo II, e di una coppia per il tipo V, ciascuna delle quali si è affidata ad un solo disegnatore. Dai risultati di queste due coppie di interpolazioni s'è cercato di vedere se le due curve, dello stesso tipo, tracciate dallo stesso interpolatore avessero delle caratteristiche simili. Oltre queste due prove particolari, altre ne sono state fatte che non si sono analizzate, giacchè, a prima vista, non presentavano differenze caratteristiche degne di rilievo; tuttavia di esse si è tenuto conto per confermare alcune conclusioni tratte dai risultati numerici.

Nei grafici annessi le curve interpolate da uno stesso disegnatore sono state segnate con una stessa linea caratteristica al fine di poter meglio rilevare le differenze tra le interpolazioni eseguite dai diversi disegnatori. Abbiamo adoperato precisamente i seguenti segni:

| | |
|---|--|
|  | per le curve fondamentali disegnate per punti, |
| | per le curve interpolate da A |
|  | » » » » B |
|  | » » » » C |
|  | » » » » D |
|  | » » » » E, F, G e H. |

È opportuno osservare che i disegnatori si sono serviti del planimetro per verificare se l'area racchiusa dal tratto di curva interpolatrice compresa fra x_{i-1} ed x_i fosse uguale all'area del corrispondente rettangolo dell'istogramma, e se l'area racchiusa fra l'intera curva e l'asse delle ascisse (entro i limiti x_0, x_n) fosse uguale all'area di tutto l'istogramma.

L'uso del planimetro non consente, tuttavia, un confronto perfetto perchè, come in generale avviene adoperando qualunque strumento di misura, si commettono errori a causa della difficoltà di far scorrere esattamente la punta del planimetro sul contorno delle

aree, ed errori nella lettura sul nonio della graduazione. Nel capitolo seguente vedremo come verrà superato questo inconveniente, e come ci si può mettere nelle condizioni migliori per un confronto quantitativo esatto tra curva fondamentale e curva proveniente dall'interpolazione grafica di un istogramma dedotto dalla fondamentale.

CAPITOLO III.

I VARI METODI DI CONFRONTO.

§ 8. — *Confronto diretto, qualitativo.*

Il più naturale metodo di confronto fra ciascuna curva interpolatrice e la corrispondente curva fondamentale, è quello *diretto qualitativo*, cioè quello che si ottiene osservando contemporaneamente le due curve da confrontare, ed esaminando, in modo generico, le differenze più rilevanti che esistono fra esse. Così, per es., si potrà giudicare se la curva interpolatrice ha, nell'insieme, un andamento più o meno conforme a quello della originaria, se presenta qualche ondulazione o altre irregolarità, se la sua ordinata massima è maggiore o minore di quella della curva originaria, se le mode coincidono o no e di quanto si discostano, così pure se la curva interpolatrice si avvicina all'asse delle ascisse con andamento tangenziale oppure no, e così via.

Insomma questo metodo è utilissimo per mettere in rilievo quelle spiccate differenze che colpiscono subito la nostra attenzione, ed inoltre serve utilmente a darci criteri, generici ma espressivi, dei difetti delle curve interpolate dal disegnatore senza avere alcuna guida.

Questo metodo però non dà una misura (quantitativa) dell'adesione tra curva fondamentale e curva interpolata, e, senza una tale misura, il nostro lavoro avrebbe scarsa utilità pratica. Abbiamo invece applicato quattro distinti metodi, che daranno una visione quantitativa abbastanza esatta, da quattro diversi punti di vista, della su menzionata adesione tra curva fondamentale e curva interpolata.

§ 9. — *Confronto quantitativo mediante l'area compresa tra le due curve.*

Questo metodo consiste nel misurare l'area D compresa tra la curva fondamentale e la curva interpolata. Evidentemente quanto maggiore è detta area tanto più la curva interpolata si discosta dalla fondamentale.

Tale misura assoluta è però poco adatta a confrontare fra loro le varie interpolazioni eseguite; infatti, se si considerano due curve interpolatrici appartenenti a tipi diversi, e se si suppone che siano uguali le aree comprese tra esse e le rispettive curve fondamentali, è migliore quell'interpolazione che corrisponde alla curva fondamentale racchiudente coll'asse delle x un'area più grande, cioè significativa di una frequenza complessiva più elevata.

Per questa ragione ci serviamo del rapporto

$$(I) \quad D_r = \frac{D}{A}$$

dove A è l'area racchiusa dalla curva fondamentale con l'asse x (area che sarebbe pure racchiusa dalla curva interpolatrice se il planimetro desse una misura rigorosamente esatta dell'area determinata da detta curva).

L'indice D_r ha poi il pregio di essere indipendente dall'unità di misura scelta per rappresentare graficamente la curva fondamentale e di conseguenza i relativi istogrammi.

Il giudizio complessivo sulle curve interpolatrici è certo utilissimo, ma non meno interessante è l'esame dell'adesione raggiunta nei singoli tratti relativi a ciascun elemento di istogramma.

A tale scopo, per ciascun intervallo (x_{i-1}, x_i) sul quale si appoggia un elemento di istogramma, calcoliamo l'area D_i compresa tra le due ordinate negli estremi dell'intervallo e i due corrispondenti tratti di curva fondamentale e curva interpolata. Dividendo poi D_i per l'area

$$A_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} y \, dx$$

si ottiene l'indice D_r per l'intervallo (x_{i-1}, x_i) .

Vediamo ora come si può fare il calcolo dell'indice in questione, in modo da eliminare gli errori accidentali e rendere confrontabili, nel miglior modo possibile, i risultati delle varie interpolazioni grafiche.

L'uso del planimetro è poco adatto per gl'inconvenienti menzionati precedentemente, abbiamo perciò seguito un metodo che, pur essendo approssimato, fornisce elementi utili al calcolo degli altri indici di cui parleremo nei prossimi paragrafi.

Si è proceduto anzitutto alla lettura delle ordinate di ciascuna

curva, sia delle fondamentali, sia di quelle ottenute dall'interpolazione degli istogrammi (*).

Evidentemente, se facciamo le letture per valori di x poco differenti tra loro abbiamo una maggiore precisione nei risultati, cosa che però non è sempre compensata dal maggior lavoro nell'eseguire i calcoli necessari al confronto quantitativo tra le curve interpolate e le rispettive curve fondamentali; d'altra parte, un gran numero di letture permette di eliminare meno quelle irregolarità accidentali dovute a imperfezioni di disegno. Abbiamo fatto le letture alla distanza di mm. 2,5 per le curve dei tipi I, II, III e IV, e alla distanza di mm. 5 per tutti gli altri tipi, ad eccezione del tipo VI per il quale abbiamo fatto le letture alla distanza di mm. 2,5 nel tratto d'intervallo (1,9) per avere una maggiore precisione, dato l'andamento poco uniforme delle curve di questo tipo nel detto intervallo, e alla distanza di mm. 5 nel rimanente tratto.

Si è fatto poi la media delle coppie consecutive delle ordinate lette su ciascuna curva, riuscendo ad eliminare così in parte quelle irregolarità accidentali su menzionate; ed allora la somma di tutti i valori medi compresi in un intervallo qualunque (x_{i-1}, x_i) (o nell'intervallo totale (x_0, x_n)) moltiplicata per il valore δ della distanza tra i punti su cui sono state fatte le successive letture, dà un valore approssimato dell'area racchiusa dal tratto di curva compresa tra x_{i-1} ed x_i (o tra x_0 e x_n), cioè dell'integrale

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} y \, dx \quad \left(\text{o} \int_{x_0}^{x_n} y \, dx \right)$$

il cui valore è noto con esattezza perchè calcolato analiticamente, come risulta dal § 6.

(*) I grafici annessi sono notevolmente ridotti rispetto agli originari disegnati su carta millimetrata con le scale dette nel cap. precedente, e perciò non è possibile distinguere in essi i tracciati poco discosti tra loro, mentre negli originari non c'era questo inconveniente anche perchè le curve messe a confronto non erano sovrapposte sullo stesso foglio. Non sarà quindi da meravigliarsi quando, nel prossimo capitolo, noteremo che i valori dei vari indici di confronto in certi intervalli, specialmente in quelli estremi, denotano una interpolazione poco buona, mentre questo fatto non si rivela ad occhio in conseguenza della grande riduzione detta e per effetto dei piccoli valori delle frequenze.

Si noti ora che le curve fondamentali, disegnate per punti, non sono tracciate con precisione, e così le curve interpolate, o i tratti di esse relative all'intervallo generico (x_{i-1}, x_i) , non racchiudono, in generale, un'area uguale a quella dell'istogramma, o rispettivamente all'area dell'elemento relativo all'intervallo (x_{i-1}, x_i) , perchè il planimetro, di cui s'è servito il disegnatore per le dovute verifiche su ciascuna curva interpolata, non indica, com'è stato già altra volta osservato, il valore preciso dell'area misurata. Questi inconvenienti si ripercuotono sul valore della differenza tra il valore esatto e quello approssimato dell'area, nel senso che il limite, per δ tendente a zero, della somma precedentemente detta non è in generale eguale al valore del corrispondente integrale.

Ora per eseguire utilmente il confronto tra le varie curve interpolate di un dato tipo e la rispettiva curva fondamentale, e anche per il confronto tra loro delle curve interpolate, occorre eliminare l'effetto di questa più o meno forte approssimazione, cosa che si ottiene portando una correzione sui valori medi precedentemente ottenuti in modo da rendere ciascuna delle suddette somme eguale al valore del corrispondente integrale (*).

È chiaro intanto che il sostituire a due ordinate $y_p, y_{p'}$ di una curva la loro media aritmetica $m_p = \frac{y_p + y_{p'}}{2}$ equivale, nella rappresentazione grafica, a sostituire — agli effetti del calcolo dell'area racchiusa dalla curva nell'intervallo $[p, p']$ — al tratto di curva la retta parallela all'asse delle x ad una altezza eguale a m_p . Ne segue che la rappresentazione grafica di tutti i valori medi, dà luogo ad una spezzata a gradinata racchiudente l'area $\Sigma \delta m_p$, (dove δ è la distanza alla quale si misurano le successive ordinate) e che rappresenta abbastanza bene l'andamento della curva data. Se i valori medi si correggono nel modo detto si avrà un'altra spezzata a gradinata che seguirà pure da vicino la data curva e che racchiude un'area

$$\Sigma \delta m'_p = \int y dx,$$

(*) La correzione dei detti valori medi si è fatta tenendo conto sia del valore di ciascuno di essi, sia della pendenza della curva nell'intervallo che li comprende. Si è creduto perciò di apportare una correzione che si possa ritruere, grosso modo, proporzionale ai valori medi, tuttavia nei tratti in cui la pendenza è piccola, come, per es., nelle vicinanze del punto di culminazione, la correzione apportata è relativamente più lieve, cioè meno che proporzionale.

dove i limiti dell'integrale sono gli estremi dell'intervallo nel quale si sono calcolati i valori medi corretti m'_p che figurano nella somma del primo membro.

Consideriamo ora più da vicino due curve da confrontare, una delle quali sia la fondamentale e l'altra sia la curva interpolatrice di un istogramma dedotto dalla stessa fondamentale.

Indichiamo poi con

$$(1) \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$(2) \quad b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$$

le due successioni di medie corrette appartenenti rispettivamente ai due tratti, di curva fondamentale e di curva interpolatrice, compresi nell'intervallo generico (x_{i-1}, x_i) . Valori aventi indici uguali nelle due successioni (1) e (2) denotano, evidentemente, che essi sono medie corrispondenti, cioè relative al medesimo intervallo di ampiezza δ .

L'area D_i compresa tra le due curve assegnate nell'intervallo considerato (x_{i-1}, x_i) si potrà allora ottenere, s'intende approssimativamente (dipendendo questa approssimazione sia dall'aver sostituito alle curve delle spezzate a gradinata, sia dalla correzione eseguita delle medie), facendo la differenza tra medie corrispondenti e poi sommando i valori assoluti di queste differenze.

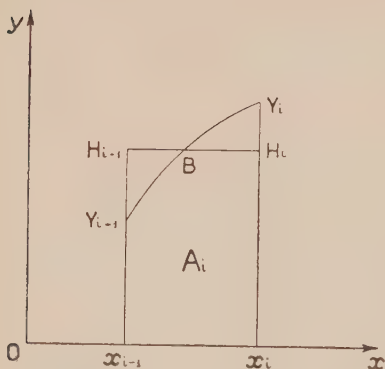
La somma dei D_i relativi a tutti gli intervalli parziali (x_{i-1}, x_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) dà il valore dell'area D relativa all'intervallo totale (x_0, x_n) .

Dividendo i valori D e D_i ($i = 1, 2, \dots, n$) rispettivamente per A e A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) (che sono noti perchè già calcolati analiticamente), si ottengono i valori di D_r per l'intervallo totale e rispettivamente per gli intervalli parziali.

È opportuno osservare che i valori dell'area relativa D_r possono essere qualche volta superiori all'unità, e ciò quando l'area compresa tra la curva fondamentale e quella interpolata, in un certo intervallo, sia superiore all'area racchiusa, nello stesso intervallo, dalla fondamentale e dall'asse delle ascisse. Questo è però un caso eccezionale che può verificarsi soltanto quando l'interpolazione sia eseguita male. D_r è però al massimo uguale a 2, perchè ciascuna delle due curve racchiude, con l'asse x e le ordinate negli estremi dell'intervallo che si considera, un'area A_i , e quindi l'area tra esse comprese è al massimo $2 A_i$.

§ 10. — *Scostamento relativo dell'area differenziale.*

Parliamo ora degli altri metodi che permettono di misurare, da altri punti di vista, l'adesione tra curva fondamentale e curva interpolata.



Incominciamo dallo scostamento relativo dell'area differenziale.

Consideriamo il tratto di curva compreso tra i punti di ascissa x_{i-1} e x_i racchiudente un'area

$$A_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} y \, dx, \text{ e il rettangolo avente la stessa area e con la base sull'asse delle } x \text{ tra i punti corrispondenti a } x_{i-1} \text{ e } x_i.$$

Chiameremo «area differenziale», l'area racchiusa tra il detto tratto di curva, il lato $H_{i-1} H_i$ del rettangolo e le ordinate nei punti x_{i-1} e x_i , cioè, nel caso della figura, la somma dei due triangoli piani non rettilinei $B H_{i-1} Y_{i-1}$ e $B H_i Y_i$.

È chiaro che a parità di ampiezza dell'intervallo (x_{i-1}, x_i) quest'area è tanto maggiore quanto più il tratto $Y_{i-1} Y_i$ della curva si discosta dal segmento $H_{i-1} H_i$; in altre parole l'area differenziale misura la maggiore o minore aderenza della curva all'orizzontale che chiude superiormente il rettangolo considerato (elemento di un istogramma).

Il confronto tra i valori dell'area differenziale determinati sia dalla curva fondamentale sia dalla curva interpolata, relativamente ad ogni elemento dell'istogramma, ci farà vedere, approssimativamente, la differenza tra l'andamento delle due curve, nel tratto corrispondente a quell'elemento. Precisamente, se l'area differenziale determinata dalla curva interpolata è minore di quella determinata dalla curva fondamentale, vuol dire che la prima curva ha un andamento più orizzontale dell'ultima; la curva interpolata ha invece un andamento più inclinato della fondamentale se essa determina un'area differenziale maggiore di quella che compete alla curva fondamentale.

Un indice che permetta il confronto tra l'andamento, nei vari tratti, della curva interpolata e della rispettiva curva fondamentale è costituito dall'espressione:

$$(II) \quad S_i = \frac{\Omega_i^* - \Omega_i}{\Omega_i}$$

che chiameremo *scostamento relativo dell'area differenziale*. In essa Ω_i e Ω_i^* sono rispettivamente le aree differenziali della curva fondamentale e della curva interpolata nell'intervallo (x_{i-1}, x_i) .

Evidentemente se, per es., S_i è maggiore di zero vuol dire che la curva interpolata ha nel tratto che si considera un andamento generalmente più ripido del corrispondente tratto della curva fondamentale.

Anche se in un certo intervallo una delle curve è unimodale e l'altra è zeromodale, l'indice S_i conserva sempre il significato suddetto. Si vede chiaro da questo caso che S_i è di per sè poco espressivo nel dire se l'adesione tra le due curve è buona o cattiva, tuttavia i valori di S_i , in concorso con quelli di D_r e degli altri indici che in seguito considereremo, servono ad indicare i difetti di andamento della curva interpolata. Così per es., se in un intervallo (x_{i-1}, x_i) il valore di D_r è piccolo vuol dire che l'approssimazione della curva interpolata, rispetto alla fondamentale, è buona, e se contemporaneamente notiamo che S_i è piccolo, vuol dire che, in quell'intervallo, le due curve hanno quasi l'identico andamento, cioè tra esse c'è una buona adesione; se invece, pur essendo D_r piccolo, abbiamo S_i grande, vuol dire che per quanto l'approvazione sia buona, tuttavia l'adesione tra le due curve non è soddisfacente. Questo caso si verifica specialmente quando, nell'intervallo (x_{i-1}, x_i) , l'elemento di istogramma racchiude un'area abbastanza grande, perchè allora il valore di D_r è in generale piccolo, mentre quello di S_i , che prescinde da l'area racchiusa da quell'elemento, può anche essere grande.

Il valore di S_i è indipendente dall'unità di misura fissata sugli assi coordinati.

Se si calcola l'indice S per l'intervallo totale — facendo la somma delle aree differenziali corrispondenti agli intervalli parziali e applicando poi la (II) — si potrà giudicare, in via molto generica, se nella curva interpolata predominano o no i tratti ripidi rispetto alla curva fondamentale, e quindi se essa ha, nel complesso, un andamento più ripido o meno di quello della fondamentale. È evidente però che S è poco significativo per dare un giudizio sulla bontà dell'interpolazione nell'intervallo (x_0, x_n) .

Vediamo ora come si può fare il calcolo dell'area differenziale di cui sopra.

Le considerazioni svolte nel paragrafo precedente a proposito del calcolo dell'area D compresa tra curva fondamentale e curva interpolata, sono evidentemente valide anche per il calcolo di Ω . Ci ser-

viamo, perciò, delle successioni di medie corrette adoperate già per ricavare D .

Sia

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_v$$

la successione di medie corrette relative al tratto di curva Y_{i-1}, Y_i precedentemente considerato; indichiamo poi con h l'ordinata dei punti del segmento $H_{i-1} H_i$.

Come valore dell'area differenziale si può allora prendere:

$$(3) \quad \Omega = \{ |a_0 - h| + |a_1 - h| + \dots + |a_v - h| \} \cdot \delta.$$

Il calcolo di questa espressione si rende praticamente più semplice osservando che se indichiamo con a'_1, a'_2, \dots, a'_r gli elementi a_i che sono maggiori di h , e con $a''_1, a''_2, \dots, a''_s$ ($r + s = v + 1$) quelli tra gli a_i minori di h , si ha

$$(3') \quad \Omega' = \frac{\Omega}{\delta} = (a'_1 + a'_2 + \dots + a'_r) - (a''_1 + a''_2 + \dots + a''_s) - \lambda h,$$

dove $\lambda = r - s$.

Quindi: per calcolare Ω' basta fare la somma degli a_i maggiori di h , sottrarre la somma degli a_i minori di h , e, secondo che gli $a_i > h$ sono in numero maggiore o minore degli $a_i < h$, sottrarre o aggiungere tante volte h quanto è la differenza tra il numero dei primi e quello dei secondi.

Per ottenere poi lo scostamento relativo dell'area differenziale, dato dalla (II), basta, evidentemente, conoscere il valore di Ω' e non quello di Ω .

§ II. — Indice di dissomiglianza del Gini.

L'indice di dissomiglianza è stato introdotto dal Gini nella sua Memoria: *Di una misura della dissomiglianza fra due gruppi di quantità e delle sue applicazioni allo studio delle relazioni statistiche* (*). « Due gruppi di quantità si dicono simili quando le quantità dei due gruppi assumono con la stessa frequenza gli stessi valori. Se n è il numero delle quantità del gruppo α , m quello delle quantità del gruppo β , n_x il numero delle quantità del gruppo α che assumono il valore x

(*) Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Tomo LXXIV, parte seconda, 1914.

ed m_x il numero delle quantità del gruppo β che assumono lo stesso valore, sarà, per ogni valore di x ,

$$\frac{n_x}{m_x} = \frac{n}{m}.$$

In ogni altro caso, i due gruppi di quantità si diranno *dissimili*.

Si intende facilmente che, se α e β sono due gruppi simili aventi uno stesso numero n di quantità, le diverse quantità del gruppo α potranno essere accoppiate, ciascuna a ciascuna, con le diverse quantità del gruppo β , in modo che tutte le n differenze tra le quantità accoppiate risultino nulle.

Se due gruppi α e β di uno stesso numero n di quantità sono invece dissimili, in qualunque modo si accoppino le quantità dei due gruppi vi saranno sempre delle differenze tra le quantità accoppiate. Si dice che i due gruppi sono tanto più dissimili quanto più sono forti le n differenze tra le quantità dei due gruppi accoppiate in modo tale da rendere le differenze minime. Ad indice di dissomiglianza tra i due gruppi si assume la media di tali differenze.

Se α e β sono due gruppi contenenti un numero diverso di quantità ed n è il numero delle quantità del gruppo α , m il numero delle quantità del gruppo β , si assumerà ad indice di dissomiglianza tra i due gruppi, l'indice di dissomiglianza tra due altri gruppi γ e δ , entrambi di p quantità, tali che γ sia simile ad α , δ sia simile a β e p sia multiplo comune di m e di n .

Quest'ultima proposizione mostra che nello studio della dissomiglianza ci si può limitare a considerare gruppi aventi uno stesso numero di elementi.

Successivamente è dimostrato, nella stessa Memoria, il teorema: «La somma delle n differenze che si ottengono accoppiando, ciascuna a ciascuna, le n quantità del gruppo α con le n quantità del gruppo β , risulta minima quando ogni quantità di un gruppo viene accoppiata con la sua *cograduata* dell'altro gruppo».

Se indichiamo allora con x_i , \bar{x}_i le coppie di quantità cograduate, l'indice di dissomiglianza è dato da

$$I = \frac{\sum |x_i - \bar{x}_i|}{n} = M |x_i - \bar{x}_i|$$

(dove M è il simbolo di media). Si ha evidentemente:

$$I \geq |M(x_i) - M(\bar{x}_i)|.$$

In sostanza, l'indice di dissomiglianza è il valore medio della differenza tra due valori cograduati del carattere in due date distribuzioni. A questo titolo l'indice di dissomiglianza tra le distribuzioni subordinate da due curve di frequenza — di cui una sia, ad es., la curva fondamentale e l'altra quella ottenuta dall'interpolazione grafica di un istogramma — è altresì un indice dell'aderenza di una curva con l'altra. Se l'indice di dissomiglianza è uguale a zero vuol dire che valori cograduati del carattere sono uguali; cioè la somma delle frequenze fino ad un qualunque valore del carattere sono uguali per le due distribuzioni, e quindi le due curve di frequenze coincidono.

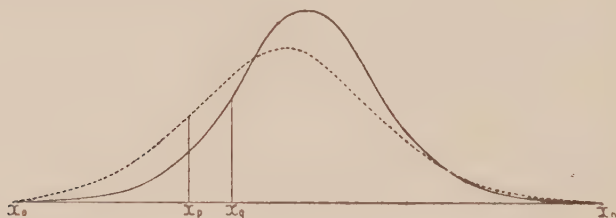
Vediamo ora più da vicino come si applica questo concetto di dissomiglianza alle distribuzioni subordinate dalle curve di frequenza.

Rappresentiamo in figura due curve di frequenza

$$(4) \quad y = \varphi(x) \quad , \quad \bar{y} = \psi(x)$$

racchiudenti aree uguali, sia A . I valori di x rappresentano l'intensità del carattere e supponiamo che varino entro i limiti x_0 e x_n . Due valori x_p , x_q saranno cograduati quando sia

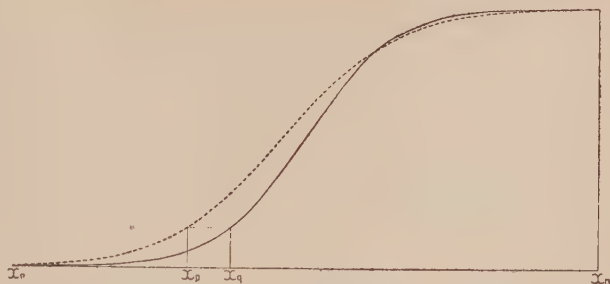
$$(5) \quad \int_{x_0}^{x_p} \varphi(x) dx = \int_{x_0}^{x_q} \psi(x) dx.$$



L'indice di dissomiglianza è allora la somma delle differenze tra quantità cograduate divisa per l'area A . Per determinare questa somma delle differenze, costruiamo le due curve integrali, rappresentate approssimativamente dalla figura seguente, delle curve date (*).

(*) Se ruotiamo le curve integrali di 90° verso destra e poi eseguiamo un ribaltamento intorno all'asse su cui si rappresenta il carattere x si ottiene — come ha messo in evidenza il GINI nella memoria: *Intorno alle curve di concentrazione*, «Metron», vol. IX, n. 3-4, 1932 — la curva di graduazione corrispondente alla data curva di frequenze. Invece di curva integrale si può quindi parlare di curva di graduazione.

Le coppie di valori cograduati non sono altro che quelli corrispondenti a ordinate uguali sulle due curve integrali, e quindi la somma delle loro differenze non è altro che l'area compresa tra le due curve integrali ora dette, o, ciò che è lo stesso, tra le due curve di graduazione corrispondenti alle curve date di frequenza.



Se invece di considerare le due curve di frequenza nell'intervallo (x_0, x_n) , consideriamo solo i due tratti di esse compresi in un intervallo parziale (x_{i-1}, x_i) , e racchiudenti aree uguali, le considerazioni precedenti rimangono evidentemente valide; per es. due valori x' , x'' di questo intervallo si diranno cograduati quando

$$\int_{x_{i-1}}^{x'} \varphi(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x''} \psi(x) dx.$$

La determinazione esatta dell'area compresa tra le due curve integrali non è in pratica sempre facile, e perciò è opportuno indicare un metodo approssimato e semplice. D'altra parte un tale metodo s'impone nelle applicazioni che c'interessano perchè non è possibile conoscere una funzione analitica rappresentatrice di ogni curva ottenuta dall'interpolazione degli istogrammi.

Dalle equazioni (4) calcoliamo le ordinate corrispondenti a valori di x distanti l'uno dall'altro di δ e indichiamo poi con

$$(1') \quad a_0, a_1, \dots, a_v$$

$$(2') \quad b_0, b_1, \dots, b_v$$

le medie delle coppie consecutive di ordinate di ciascuna delle due curve di frequenza. Indici eguali nelle successioni (1') e (2') indicano evidentemente che i corrispondenti valori medi sono relativi al medesimo intervallo di ampiezza δ .

Le due espressioni

$$\sum \delta a_i \quad \text{e} \quad \sum \delta b_i$$

misurano approssimativamente le aree racchiuse da ciascuna curva. Per il nostro scopo è necessario ch'esse siano eguali ed è quindi opportuno correggere, proporzionalmente, i valori a_i e b_i in modo che

$$\Sigma \delta a_i = \Sigma \delta b_i = A,$$

e perciò basta che sia :

$$(6) \quad \Sigma a_i = \Sigma b_i$$

Supponiamo, per non introdurre dei nuovi simboli, che le successioni (1') e (2') siano formate dai valori corretti in modo da soddisfare la (6).

Formiamo le due successioni dei valori α_i e β_i ottenuti nel modo seguente

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = a_0 & \beta_0 = b_0 \\ \alpha_1 = a_0 + a_1 & \beta_1 = b_0 + b_1 \\ \alpha_2 = a_0 + a_1 + a_2 & \beta_2 = b_0 + b_1 + b_2 \\ \dots & \dots \\ \alpha_v = a_0 + a_1 + \dots + a_v & \beta_v = b_0 + b_1 + \dots + b_v \end{array}$$

La successione dei numeri $\delta \alpha_i$ misura le altezze dei tratti paralleli all'asse x di una spezzata a gradinata, con ogni gradino di ampiezza δ , tale che la linea continua che unisce i punti medi di ogni tratto parallelo all'asse x si approssima alla curva integrale dedotta dalla $y = \varphi(x)$. Analogamente per la successione dei $\delta \beta_i$. Ne segue che la somma

$$E = \Sigma |\alpha_i - \beta_i| \delta^2$$

misura approssimativamente l'area compresa tra le due curve integrali.

Posto

$$c_i = a_i - b_i, \quad \gamma_i = \alpha_i - \beta_i \quad (i = 0, 1, \dots, v)$$

si ha evidentemente

$$\begin{array}{l} \gamma_0 = c_0 \\ \gamma_1 = c_0 + c_1 = \gamma_0 + c_1 \\ \gamma_2 = c_0 + c_1 + c_2 = \gamma_1 + c_2 \\ \dots \\ \gamma_v = c_0 + c_1 + \dots + c_v = \gamma_{v-1} + c_v = 0. \end{array} \quad (7)$$

Note allora le due successioni (1') e (2'), supposte corrette nel modo detto, calcoliamo facilmente

$$E = \sum |\gamma_i| \delta^2$$

senza determinare prima i valori α_i e β_i ma facendo solo le somme successive delle differenze c_i tra i valori corrispondenti delle successioni (1') e (2').

L'indice di dissomiglianza si calcola quindi dalla formula

$$(8) \quad I = \frac{\sum |\gamma_i| \delta^2}{A} = \frac{\sum |\gamma_i| \delta}{\sum \alpha_i}.$$

I valori assunti da I sono positivi, e il minimo, cioè lo zero, è raggiunto solo nel caso di somiglianza perfetta tra le due curve. Il massimo valore è invece raggiunto quando le curve presentano la massima dissomiglianza, ed è chiaro che ciò si verifica quando in una delle curve il valore x_0 è assunto con una frequenza eguale ad A , e gli altri valori tra x_0 e x_n , quest'ultimo incluso, con la frequenza zero, mentre nell'altra curva il valore x_n è assunto con la frequenza A , e gli altri valori dell'intervallo considerato con frequenza nulla. La prima curva integrale è allora formata dai due segmenti che uniscono i tre punti $(x_0, 0)$, (x_0, A) e (x_n, A) , mentre la seconda curva è formata dai due segmenti che uniscono i tre punti $(x_0, 0)$, $(x_n, 0)$ e (x_n, A) .

L'area compresa tra queste particolari curve integrali è evidentemente $(x_n - x_0) \cdot A$, e quindi, dividendo questa quantità per A , si ha che il massimo dell'indice di dissomiglianza è dato dal valore $x_n - x_0$, che misura l'ampiezza dell'intervallo nel quale si considerano le due curve.

Se dividiamo l'indice assoluto di dissomiglianza fra le due curve per il massimo che questo può raggiungere, otteniamo l'indice relativo di dissomiglianza I_r .

Dalla (8) si vede subito che il valore di I_r in un intervallo (x_h, x_k) , in cui ciascuna delle due curve di frequenza racchiude un'area A_h , è uguale all'area compresa, nel detto intervallo, tra le due curve di graduazione corrispondenti alle curve date, divisa per l'area del rettangolo che ha un lato uguale $x_k - x_h$ e l'altro uguale A_h .

Mentre l'indice assoluto di dissomiglianza ha come massimo l'ampiezza di variazione del carattere, i valori che può assumere I_r sono evidentemente compresi tra 0 e 1, e ciò mostra chiaramente il vantaggio dell'indice relativo rispetto a quello assoluto agli effetti della comparazione tra diverse interpolazioni.

L'applicazione pratica di questo procedimento allo studio della dissomiglianza fra le distribuzioni subordinate dalla curva fondamentale di ogni tipo e da ciascuna delle curve interpolate graficamente sugli istogrammi dedotti dalla fondamentale, si fa abbastanza rapidamente, dato che possiamo utilizzare gli elementi che sono serviti per il calcolo di D e di Ω .

Abbiamo determinato il valore di I per ciascuna curva interpolatrice sia considerandola nell'intervallo totale (x_0, x_n) , sia considerando i singoli tratti di essa relativi a ciascun intervallo parziale sul quale cade un elemento di istogramma.

Ricordiamo ora che per calcolare i valori di D e di Ω abbiamo corretto le medie comprese in ciascun intervallo (x_{i-1}, x_i) , in modo che la somma di esse moltiplicata per δ sia uguale all'area dell'elemento di istogramma relativo al medesimo intervallo (x_{i-1}, x_i) . La successione di tutte le medie corrette comprese tra x_0 e x_n , rende, implicitamente,

la somma di esse moltiplicata per δ eguale al valore dell'integrale $\int_{x_0}^{x_n} y dx$;

perciò la detta successione sarebbe utilizzabile per il calcolo dell'indice di dissomiglianza relativo a tutto l'intervallo (x_0, x_n) . C'è parso invece opportuno procedere ad una correzione globale delle medie (senza tener conto della su menzionata eguaglianza negli intervalli parziali), portando così cambiamenti meno sensibili alle medie non corrette, poichè nell'insieme c'è un certo compenso tra differenze in più e differenze in meno, circostanza questa che lascia tutto più conforme all'originale. La detta correzione globale s'è fatta, ripetiamolo, solo per le medie delle curve interpolatrici e non per quelle della fondamentale perchè queste ultime risentono meno gli errori di tracciamento della curva, e quindi le medie dedotte dalla correzione globale differirebbero insensibilmente da quelle dedotte dalla correzione per intervalli parziali.

Note le successioni delle medie corrette sia della curva fondamentale sia della curva interpolata, negl'intervalli (x_{i-1}, x_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) oppure (x_0, x_n) , si determinano le differenze c_i tra elementi corrispondenti, si calcolano poi i valori γ_i nel modo espresso dalle (7), e infine, facendo le operazioni indicate nella (8), si calcola il valore dell'indice assoluto di dissomiglianza per l'intervallo a cui si riferiscono le successioni di medie corrette. Il quoziente di questo valore per l'ampiezza del detto intervallo fornisce l'indice relativo di dissomiglianza I_r , che è stato calcolato con cinque cifre decimali, ma che,

per comodità di lettura, è stato riportato, come vedremo in seguito, moltiplicato per 100; questo valore si indicherà con I' .

L'indice relativo di dissomiglianza è indipendente dalla scala fissata per rappresentare graficamente le curve.

È opportuno qui ricordare che per le curve del tipo VI non sono state fatte tutte le letture alla stessa distanza, per la ragione detta nel § 8, e perciò quando si deve calcolare l'indice I , per l'intervallo totale, si devono prendere in considerazione soltanto le letture fatte alla distanza di mm. 5.

§ 12. — Metodo del Pearson.

L'indice del Pearson (*) per giudicare la bontà di adattamento di una certa interpolazione, che rappresenta una distribuzione teorica rispetto ad una distribuzione osservata S_1 , è costituito dalla probabilità che un'altra distribuzione reale si accosti a quella interpolata meno di quanto vi si accostasse la S_1 . Quindi se questa probabilità è elevata, ciò significa che la distribuzione interpolata si adatta bene a quella osservata S_1 , perchè c'è poca probabilità che un'altra distribuzione reale si accosti più della S_1 .

Nel nostro caso, calcolando l'indice di Pearson della curva fondamentale, che rappresenta la distribuzione teorica, rispetto ad una curva S_1 , che si pensa come distribuzione osservata, ma che in effetto è il risultato di una interpolazione grafica di un istogramma, avremo una misura dell'adattamento della curva fondamentale a quella interpolata. Assumeremo lo stesso indice come misura dell'adattamento della curva S_1 alla fondamentale.

La formula proposta dal Pearson per calcolare la detta probabilità è

$$P = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots + \right. \\ (9) \quad \left. + \frac{x^{n-3}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-3)} \right) \text{ se } n \text{ è dispari,}$$

$$P = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{x^{n-3}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-3)} \right) \text{ se } n \text{ è pari,}$$

(*) K. PEARSON. « Philosophical Magazine » Vol. L, pp. 157-175, 1900.

in cui

$$\chi^2 = \sum \frac{(m_i - m'_i)^2}{m_i}$$

essendo m_i , m'_i rispettivamente i dati teorici e i dati osservati.

Le *Tables for testing the goodness of fit of theory to observation* (*) permettono di calcolare rapidamente il valore di P per n compreso fra 3 e 30, quando è noto il valore di χ^2 .

L'applicazione di questo metodo alle curve di cui trattiamo, non è stato fatto come pei due metodi precedenti, prendendo prima in considerazione i singoli tratti corrispondenti a ciascun elemento di istogramma e poi l'intera curva, ma è parso più opportuno fare, per ciascun tipo, una divisione dell'intervallo totale in un piccolo numero d'intervalli parziali, in modo che per tutte le curve di uno stesso tipo sia eguale il numero dei tratti nei quali si apprezza la bontà dell'interpolazione.

Evidentemente non è stato possibile fissare un unico criterio per determinare la divisione dell'intervallo totale di ciascun tipo di curve in intervalli parziali; si è stati invece guidati dalla forma della curva originaria e dallo scopo di utilizzare, come specificheremo più in là, parte dei calcoli fatti per determinare gli indici precedentemente considerati.

Della forma della curva originaria, si tien conto perchè ci sono dei tratti di facile interpolazione, per i quali basta limitarsi a considerare intervalli abbastanza ampi, e dei tratti, specie in vicinanza del punto di massima ordinata, in cui è più consigliabile restringere l'intervallo per meglio vedere l'adattamento delle curve interpolate. In generale per i tipi unimodali la moda si è fatta coincidere con l'estremo di un intervallo, esclusi i tipi IV, V e VI, per i quali si è fatta cadere nell'interno di un intervallo. La curva dei redditi, secondo Pareto, che è sempre decrescente, si è divisa in quattro tratti, di cui il primo corrisponde ad un intervallo di 10 cm. e gli altri tre a intervalli di 20 cm.; la curva di Lexis si è divisa in sette tratti di eguale ampiezza.

Circa il calcolo di χ^2 dobbiamo anzitutto fissare il significato di m_i ed m'_i . Si potrebbero prendere i valori delle ordinate misurate in corrispondenza a punti di ascissa susseguentisi a piccola distanza,

(*) W. PALIN ELDERTON, « *Biometrika* », Vol. I, pp. 155-163, 1901.

ma questi valori sono affetti, come è stato detto in altra occasione, da errori che provengono dalla poca esattezza del tracciato della curva fondamentale, costruita per punti, e dal fatto che ciascuna curva interpolatrice non risponde con precisione alla condizione voluta, che cioè l'area racchiusa da tutta essa e dai singoli tratti sia rispettivamente eguale all'area di tutto l'istogramma e dei singoli elementi, giacchè il planimetro non è un mezzo sicuro per verificare tale condizione. Questo inconveniente può evidentemente pregiudicare la fiducia di paragonare quantità omogenee quando si mettono a confronto le varie curve interpolatrici. Abbiamo perciò preferito, anche per economia di calcoli, prendere per m_i ed m_i' due medie corrispondenti nelle successioni (1) e (2) di medie corrette per intervalli (x_{i-1}, x_i) , la cui differenza $a_i - b_i$ è già servita per calcolare l'area D compresa tra curva fondamentale e curva interpolatrice e a calcolare l'indice di dissomiglianza.

È chiaro che per rendere omogeneo il confronto tra i risultati relativi ai vari tratti di una stessa curva, e alle diverse curve, bisogna prendere uno stesso numero n di termini in ciascuno degli intervalli parziali in cui si è diviso l'intervallo totale di ogni tipo; abbiamo creduto sufficiente fissare $n = 10$.

L'altro criterio, a cui s'è fatto precedentemente cenno, per determinare gli intervalli parziali è che, in ciascuno di detti intervalli, le successioni (1) e (2) contengano un numero di termini eguale a dieci o a un multiplo di dieci, (in quest'ultimo caso è facile infatti prendere, in dette successioni, dieci medie equidistanti tra loro).

Per il calcolo di χ^2 ci siamo dunque serviti delle successioni di medie corrette per intervalli.

S'è fatta eccezione per le curve dei tipi VI e VII, per le quali si sono prese le successioni di medie corrette globalmente, cioè quelle corrette tenendo conto soltanto dell'intervallo totale (x_0, x_n) . Per il tipo VI la ragione dell'eccezione è dovuta al fatto, già altra volta menzionato, che negli intervalli parziali compresi tra 1 e 9 le medie calcolate sono state ottenute da letture fatte a distanza di mm. 2,5, mentre negli altri intervalli a distanza di mm. 5; questa diversità s'è eliminata, invece, quando si sono determinate le medie che sono servite a calcolare l'indice I relativo all'intervallo totale. Per il tipo VII la ragione della scelta è conseguenza del fatto che lo studio per intervalli delle curve n. 25 e 26 è stato limitato tra i valori —14 e 13 dell'ascissa, mentre l'interpolazione grafica dei tre istogrammi costruiti per detto tipo è stata eseguita nell'intervallo (—15, 15); la

scelta fatta è stata dunque necessaria per studiare, nell'intervallo totale, la bontà dell'interpolazione di tutte e tre le curve ottenute.

Dobbiamo ora osservare che alcuni dei tipi di curve considerati hanno i tratti estremi tangenti all'asse x , e perciò quivi le curve fondamentali hanno ordinate nulle ed altre ordinate molto piccole, mentre le corrispondenti curve interpolate sono spesso, in quei tratti estremi, abbastanza discoste dall'asse delle ascisse, per cui il numeratore del rapporto

$$\frac{(m_i - m'_i)^2}{m_i}$$

è una quantità alquanto diversa dallo zero, mentre il denominatore assume valori molto piccoli e anche nulli. S'è quindi creduto bene escludere questi tratti che introducevano, nel calcolo di κ^2 , valori eccezionalmente alti.

Osserviamo infine che, limitandoci come s'è detto a prendere solo 10 termini per ogni intervallo parziale, quando il valore di κ^2 supera 45, la probabilità P data dalla formula (9) è inferiore a $\frac{1}{100.000}$. Ora nelle applicazioni fatte non è raro il caso di avere κ^2 maggiore di 45 e alcune volte notevolmente superiore a questo numero, ed allora — a parte il fatto che l'interpolazione nel corrispondente intervallo non è punto buona — il valore di P non permette più di eseguire il confronto propostoci. Possiamo invece servirci di κ^2 ed è perciò che nelle tabelle del Cap. seguente diamo tanto i valori di P quanto quelli di κ^2 .

§ 13. — *Considerazioni generali sui cinque metodi di confronto.*

I quattro metodi adottati per il confronto quantitativo insieme a quello qualitativo si completano senza compenetrarsi, in quanto ciascuno di essi offre elementi, utili al confronto, differenti da quelli degli altri.

Non è quindi da meravigliarsi se i vari indici considerati non seguono la stessa legge di variabilità, perchè essi considerano l'adattabilità della curva interpolata alla fondamentale secondo concetti completamente diversi. Riassumiamo infatti i significati dei vari indici. D_r , calcolato per un intervallo parziale o per l'intervallo totale, misura il discostarsi della curva interpolata dalla fondamentale in rapporto all'area racchiusa da ciascuna di queste curve nell'inter-

vallo che si considera. L'indice S misura, in media, l'inclinazione che in un certo intervallo ha la curva interpolata rispetto alla fondamentale. L'indice relativo di dissomiglianza I_r fra le distribuzioni subordinate dalle due curve di frequenze messe a confronto, in un intervallo assegnato, misura l'adesione tra le corrispondenti curve di graduazione, che, del resto, esprimono, sotto una diversa forma, le stesse distribuzioni subordinate dalle date curve di frequenze. La variabilità di I_r si avvicina perciò molto a quella di D_r .

Il valore di χ^2 , tenendo conto del quadrato della differenza tra medie di ordinate corrispondenti delle due curve poste a confronto, e rapportando questo quadrato alla media appartenente alla curva che tra le due s'è presa per riferimento, misura il grado di adattabilità della curva interpolata. Sul valore di χ^2 e quindi di P hanno maggior peso i valori più elevati delle dette differenze, appunto perchè tutte le differenze figurano al quadrato, e di ciò vedremo meglio in seguito l'importanza.

Per vedere ora meglio come si completano tra loro i vari metodi di confronto applicati, ne riassumiamo le principali caratteristiche.

Il metodo di confronto diretto, qualitativo, dà ragguaglio sulla posizione del punto di massima ordinata, sul modo di tendere della curva verso l'asse x , sulla circostanza che nel punto iniziale o finale la curva interpolata raggiunge o no l'asse delle ascisse, e in genere, sui difetti più evidenti di ciascuna curva interpolata. Esso è inoltre utile a dare una visione sintetica e intuitiva della bontà dell'interpolazione.

L'indice D_r misura l'approssimazione della curva interpolata rispetto alla fondamentale. Va notato, in particolare, che se l'area racchiusa dalla curva in un certo intervallo ha un valore piccolo, come avviene negl'intervalli estremi, D_r assume facilmente un valore alto, perchè, rispetto all'area detta, si rende rilevante quella compresa fra la curva fondamentale e la curva interpolata. Il contrario avviene quando la suddetta area ha un valore grande, come per esempio se si considera l'intervallo totale.

Il secondo metodo quantitativo adoperato dà una misura dell'andamento più o meno inclinato della curva interpolata rispetto alla fondamentale, purchè si applichi ai singoli intervalli parziali, è invece poco significativo, perchè troppo generico, quando si applica all'intervallo totale.

Il valore di S_i non tiene conto dell'area racchiusa da l'istogramma nell'intervallo a cui S_i è riferito, e perciò, a differenza di D_r , dà una

misura più mediata della diversità che si riscontra ad occhio tra le due curve messe a confronto.

L'indice I_r dà il valore medio delle differenze tra i valori cograduati del carattere nell'una e nell'altra distribuzione subordinata dalla curva fondamentale e da quella interpolata, rapportata al massimo che detto valore medio può raggiungere. Questo massimo è uguale alla differenza tra il valore massimo e minimo del carattere, onde, a parità di indice assoluto di dissomiglianza, è meno grande quel valore di I_r che corrisponde ad un intervallo maggiore; ciò esprime il fatto che quando più è grande l'intervallo di variabilità del carattere, tanto più è difficile avere delle distribuzioni simili. Per I_r' vale analoga osservazione fatta precedentemente a proposito di D_r , circa i valori da esso assunti in corrispondenza di intervalli in cui l'area racchiusa dalla curva fondamentale è piccola.

L'indice P dà per ogni curva interpolatrice di un dato istogramma la probabilità di avere — interpolando altre volte quell'istogramma — delle curve egualmente o meno simili alla fondamentale. Perciò questo indice dà una misura della bontà dell'interpolazione, però non dà alcun indizio dei difetti della curva interpolata.

È dunque dall'insieme di tutti questi metodi di confronto che potremo trarre un fondato giudizio sui risultati delle interpolazioni grafiche eseguite, e dedurne adeguati elementi per effettuare eventuali correzioni.

CAPITOLO IV.

CONFRONTI PER I SINGOLI TIPI DI CURVE CONSIDERATI E CONCLUSIONI.

§ 14. — *Tipo I.*

L'interpolazione, eseguita dal disegnatore A , del primo istogramma — con elementi aventi la base di una unità — ha dato luogo ad una curva (*) con andamento sufficientemente conforme alla fondamentale. La differenza di andamento è notevole nella parte più alta dove la curva interpolatrice subisce dei cambiamenti di dire-

(*) Per comodità e semplicità di notazioni chiamiamo le curve con lo stesso numero dell'istogramma da cui sono state ricavate mediante interpolazione grafica.

zione piuttosto irregolari; la moda ha il valore 0,5 e l'ordinata massima è di 964 unità, mentre i rispettivi valori per la curva fondamentale sono zero e 1000, ciò che dà un aspetto tozzo alla parte alta della curva.

Nell'intervallo $(-2, -1)$ la curva interpolata non sale come la fondamentale, con una pendenza quasi costante, ma sale dapprima lentamente, poi molto rapidamente per tornare infine a incurvarsi con un brusco cambiamento di direzione. Dalla tav. 1 si vede che $S = 0,439$, D_r ed I_r' assumono i più grandi valori, cioè rispettivamente 0,186 e 5,492, e indicano che l'approssimazione cui dà luogo la curva interpolata, in questo intervallo, non è tanto soddisfacente.

Nei due intervalli successivi $(-1, 0)$, $(0, 1)$ all'osservatore si presenta una notevole divergenza tra le due curve, tuttavia i valori di D_r , non molto elevati, esprimono una approssimazione discreta perchè, rispetto all'area dei due corrispondenti elementi di istogramma, si rende poco sensibile l'area D compresa tra i due tratti di curve; l'indice S è negativo e assume i due più grandi valori assoluti, che sono l'espressione della notevole orizzontalità della curva interpolatrice in questo tratto.

Il ramo discendente della curva 1 ha da principio un andamento poco uniforme; gli indici assumono valori ancora di notevole intensità, poi tale intensità diminuisce gradualmente indicando sempre più stretta concordanza tra la direzione della curva interpolata e quella della curva fondamentale; negli ultimi intervalli le due curve sono praticamente coincidenti.

GRAFICO I.

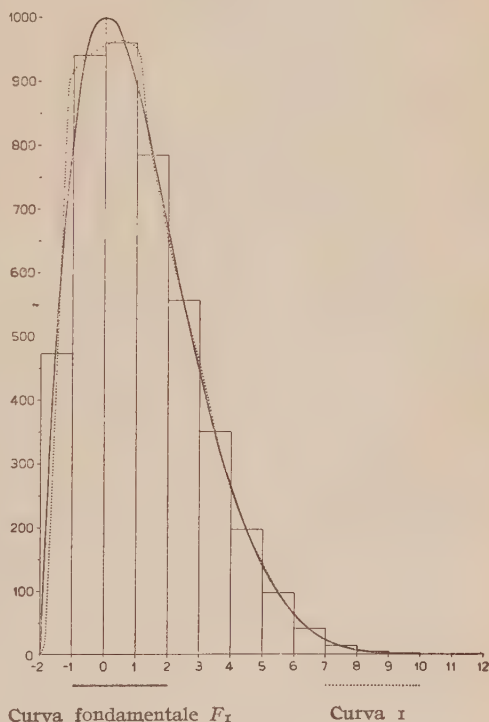


TAVOLA I. — *Indici D_r , S e I' , per le curve interpolatrici
degli istogrammi 1 e 2.*

(Tipo I).

| Intervallo | Area relativa compresa tra la curva F_1 e la | | Scostamento relativo dell'area differenziale | | Indice relativo di dissomiglianza (moltiplicato 100) tra le distribuzioni subordinate da F_1 e dalla | |
|-------------------|--|---------|--|---------|--|---------|
| | curva 1 | curva 2 | curva 1 | curva 2 | curva 1 | curva 2 |
| Da -2 a -1 | 0,186 | 0,215 | + 0,439 | - 0,590 | 5,492 | 6,804 |
| » -1 » 0 | 0,040 | | - 0,797 | | 1,278 | |
| » 0 » 1 | 0,031 | 0,091 | - 0,890 | - 0,794 | 0,969 | 2,930 |
| » 1 » 2 | 0,032 | | + 0,401 | | 0,933 | |
| » 2 » 3 | 0,018 | 0,037 | - 0,172 | + 0,142 | 0,537 | 1,166 |
| » 3 » 4 | 0,018 | | + 0,139 | | 0,584 | |
| » 4 » 5 | 0,018 | 0,031 | - 0,115 | + 0,319 | 0,592 | 0,815 |
| » 5 » 6 | 0,021 | | + 0,095 | | 0,054 | |
| » 6 » 7 | 0,005 | 0,070 | + 0,021 | + 0,077 | 0,015 | 1,330 |
| » 7 » 8 | 0,000 | | 0 | | 0,000 | |
| » 8 » 9 | 0,000 | 0,390 | 0 | - 0,148 | 0,000 | 7,073 |
| » 9 » 10 | 0,000 | | 0 | | 0,000 | |
| Intervallo Totale | 0,046 | 0,116 | + 0,081 | - 0,360 | 0,196 | 0,614 |

Curva F_1 : fondamentale disegnata per punti.

» 1: interpolatrice dell'istogramma con elementi di ampiezza uno (disegnatore A).

» 2: » » » » » due (» D).

TAVOLA II. — *Indici x^2 e P per le curve interpolatrici
degli istogrammi 1 e 2.*

| Intervallo | x^2 | | P | |
|------------|---------|---------|---------|---------|
| | Curva 1 | Curva 2 | Curva 1 | Curva 2 |
| Da -2 a 0 | 159,01 | 3796,26 | 0,00000 | 0,00000 |
| » 0 » 2 | 11,27 | 96,46 | 0,25886 | 0,00000 |
| » 2 » 5 | 1,48 | 10,19 | 0,99561 | 0,33628 |
| » 5 » 8 | 0,30 | 1,16 | 0,99983 | 0,99816 |
| » 8 » 10 | — | — | — | — |

Nell'intervallo totale il valore di D_r è piccolo perchè, rispetto all'area racchiusa da tutta la curva, è poco rilevante l'area compresa tra essa e la fondamentale. Anche S è piccolo perchè vi è compenso fra i tratti più inclinati e quelli meno inclinati. Questi valori insieme a quello dell'indice di dissomiglianza relativo dicono che, nel complesso, l'interpolazione non è mal fatta.

Si può quindi concludere che, benchè la forma della curva interpolata sia sensibilmente diversa da quella della curva fondamentale in prossimità del massimo dell'istogramma, l'aderenza tra le due curve sia quantitativamente discreta nei primi quattro intervalli, soddisfacente negli intervalli successivi e praticamente perfetta nell'ultimo tratto.

Tale conclusione è convalidata dai valori di P contenuti nella tavola II che partono dallo zero e si approssimano alla unità.

La curva 2 tracciata dal disegnatore D interpolando l'istogramma con elementi aventi l'ampiezza di due unità, si differenzia notevolmente dalla originaria, tranne che nel tratto relativo all'intervallo $(2, 8)$.

Il suo punto iniziale non ha ordinata zero ma 500; il punto di culminazione ha le coordinate $x = 0,9$, $y = 893$, e di conseguenza la parte superiore della curva è tozza.

Gli indici D_r , S ed I_r' (cfr. tav. I) forniscono una misura della divergenza esistente tra la curva in esame e la fondamentale. È da notare che la rilevatezza del valore di D_r e I_r' nell'intervallo $(8, 10)$, dipende non da una grande ed evidente diversità fra i due corrispondenti tratti di curve — come avviene per es. nell'intervallo $(-2, 0)$ — ma, come fu già notato al paragr. 13, dalla piccolezza dell'area racchiusa da quel rettangolo dell'istogramma, perchè rispetto a questa sono ben rilevanti le lievi differenze tra le corrispondenti ordinate. Al contrario, l'area grande racchiusa da tutta la curva giustifica il valore non grande di D_r ed I_r' nell'intervallo totale rispetto alla suaccennata differenza esistente tra curva interpolata e curva fondamentale.

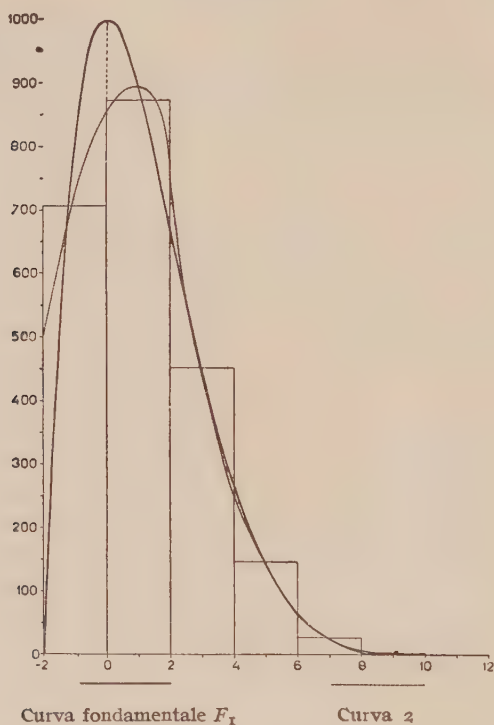
Dalla Tav. II si vede che P è nullo nei due intervalli $(-2, 0)$, $(0, 2)$, però nel primo di questi due intervalli x^2 ha il notevole valore 3796,26 dipendente dalla diversità, già messa in rilievo, della curva interpolata rispetto alla fondamentale nel tratto iniziale.

Uno sguardo d'insieme su questo primo tipo di curva mostra la tendenza di ciascun operatore a far raggiungere il massimo in

corrispondenza del centro dell'elemento più alto dell'istogramma, e di seguire troppo da vicino la forma dell'istogramma.

L'inizio della curva 2 col valore 500 dell'ordinata è in parte dovuta alla scarsa conoscenza, da parte del disegnatore *D*, delle curve di

GRAFICO 2.



frequenze generalmente usate nella statistica. Esso mostra anche quanto sia pregiudizievole, per l'esattezza dell'interpolazione, avere gli intervalli estremi ampi, perchè il disegnatore, nel fissare l'andamento della curva negli estremi, non è sussidiato dalla vista degli elementi contigui dell'istogramma, i quali, per i detti intervalli, esistono solo da una parte.

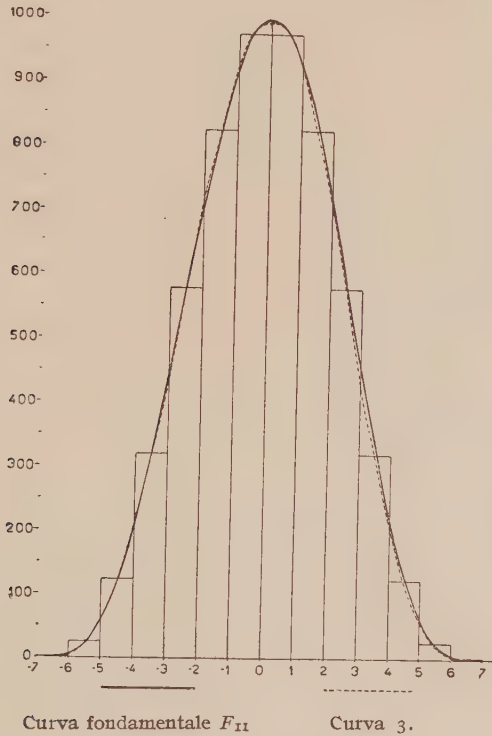
§ 15. — Tipo II.

Il primo istogramma di questo tipo (n. 3 nell'ordine progressivo generale), *simmetrico* e con elementi aventi la base di ampiezza unitaria, è stato interpolato dal disegnatore *B* che ha tracciato una

curva molto conforme alla fondamentale, cosa che del resto era da aspettarsi dato che l'istogramma rispecchia abbastanza bene l'andamento della curva.

I vari indici si sono calcolati solo per i tratti compresi nell'intervallo $(-7, 0)$, giacchè nell'altro mezzo intervallo $(0, 7)$ la curva interpolata è perfettamente simmetrica. I valori massimi assunti rispettivamente dagli indici D , ed I' sono nell'intervallo $(-6, 5)$, perchè ivi sono molto sensibili le piccole differenze tra ordinate cor-

GRAFICO 3.



rispondenti, rispetto alla piccolezza dell'area dell'elemento di istogramma relativo al detto intervallo.

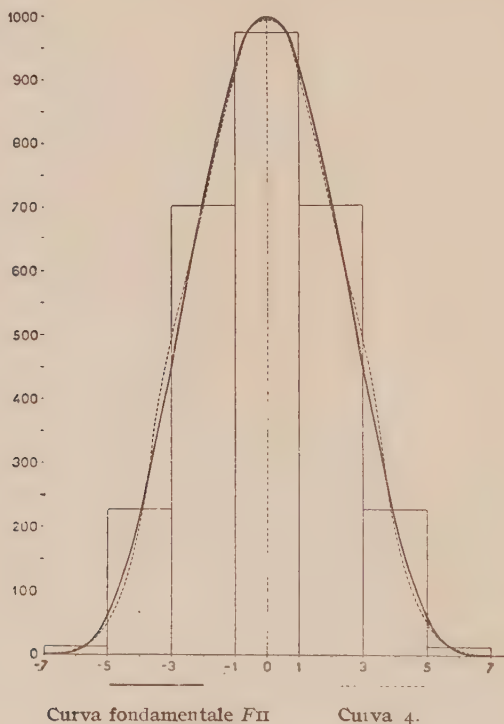
I valori assunti da S e P — cfr. Tav. III e IV — fanno vedere la buona adesione tra curva interpolata e fondamentale.

La curva ottenuta dall'interpolazione del secondo istogramma — n. 4, simmetrico e con elementi di base 2 — è simmetrica come l'originaria; presenta nell'intorno dei punti di ascisse 3 e -3 un rigonfia-

mento, mentre nel tratto centrale è più affusata e raggiunge quasi l'ordinata 1000. Questa curva è stata tracciata dallo stesso disegnatore *B*, in tempo diverso da quello in cui fu fatta la precedente interpolazione, ma non ha alcuna somiglianza particolare con la precedente curva.

L'indice relativo di dissomiglianza ha il massimo valore negli intervalli estremi, si conserva ancora elevato nei tratti simmetrici

GRAFICO 4.



compresi negli intervalli $(-5, 3)$ e $(3, 5)$, per effetto della su menzionata ondulazione della curva interpolatrice. Nel tratto centrale $(-1, 1)$ il valore di I_r' è invece abbastanza piccolo, perchè, in effetto, la curva interpolatrice ha, approssimativa mente, le stesse ordinate della originaria.

Gli indici D_r , S e P mostrano che l'interpolazione ha dato un discreto risultato se si considera che ogni elemento dell'istogramma aveva l'ampiezza di 5 cm.

TAVOLA III. — Indici D , $S e I'$, per le curve interpolatrici degli istogrammi 3, 4 e 5.
(Tipo II)

| Intervallo | Area relativa compresa tra la curva F_{II} e la | | | | | Scostamento relativo della area differenziale | | | | | Indice relativo di disomogeneità (moltiplicato 100) tra le distribuzioni subordinate da F_{II} e dalla | | | | |
|-----------------------------|---|---------|---------|---------|---------|---|---------|---------|---------|---------|--|---------|---------|---------|---------|
| | curva 3 | curva 4 | curva 5 | curva 3 | curva 4 | curva 5 | curva 3 | curva 4 | curva 5 | curva 3 | curva 4 | curva 5 | curva 3 | curva 4 | curva 5 |
| Da -7 a -6 | 0 | 0,146 | 0,328 | 0 | -0,139 | -0,289 | 0,000 | | | 0,000 | | | | | |
| » -6 » -5 | 0,057 | | | + 0,107 | | | 1,435 | | | 1,435 | | | | 3,048 | 7,882 |
| » -5 » -4 | 0,012 | 0,126 | | - 0,033 | + 0,193 | | 0,268 | | | 0,268 | | | | 2,510 | |
| » -4 » -3 | 0,018 | | | - 0,096 | | | 0,551 | | | 0,551 | | | | | |
| » -3 » -2 | 0,012 | 0,043 | 0,087 | + 0,108 | - 0,137 | + 0,228 | 0,369 | | | 0,369 | | | | 0,772 | 1,826 |
| » -2 » -1 | 0,003 | | | - 0,018 | | | 0,051 | | | 0,051 | | | | | |
| » -1 » 0 | 0,006 | 0,004 | 0,058 | - 0,252 | - 0,104 | - 0,711 | 0,166 | | | 0,166 | | | | 0,040 | 1,705 |
| » 0 » 1 | 0,006 | | | - 0,252 | | | 0,166 | | | 0,166 | | | | | |
| » 1 » 2 | 0,003 | 0,043 | | - 0,018 | - 0,137 | | 0,051 | | | 0,051 | | | | 0,772 | |
| » 2 » 3 | 0,012 | | | + 0,108 | | | 0,369 | | | 0,369 | | | | | |
| » 3 » 4 | 0,018 | 0,126 | 0,086 | - 0,096 | + 0,193 | + 0,155 | 0,551 | | | 0,551 | | | | 2,510 | 2,477 |
| » 4 » 5 | 0,012 | | | - 0,033 | | | 0,268 | | | 0,268 | | | | | |
| » 5 » 6 | 0,057 | 0,146 | 0,201 | + 0,107 | - 0,139 | - 0,178 | 1,435 | | | 1,435 | | | | 3,048 | 4,455 |
| » 6 » 7 | 0 | | | 0 | | | 0,000 | | | 0,000 | | | | | |
| Intervallo Totale | 0,008 | 0,029 | 0,079 | - 0,020 | 0,000 | + 0,015 | 0,029 | | | 0,029 | | | | 0,141 | 0,442 |

Curva F_{II} : fondamentale disegnata per punti.

3: interpolatrice dell'istogramma con elementi di ampiezza uno (Disegnatore B).

4: » » » due (» B).

5: » » » tre (» A).

TAVOLA IV. — *Indici χ^2 e P per le curve interpolatrici degli istogrammi 3, 4 e 5.*

| Intervallo | χ^2 | | | P | | |
|------------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | Curva 3 | Curva 4 | Curva 5 | Curva 3 | Curva 4 | Curva 5 |
| Da -7 a -6 | — | — | — | — | — | — |
| » -6 » -4 | 0,68 | 18,52 | 142,00 | 0,99962 | 0,02998 | 0,00000 |
| » -4 » -2 | 1,31 | 16,20 | 139,44 | 0,99550 | 0,06325 | 0,00000 |
| » -2 » 0 | 0,24 | 1,82 | 18,39 | 0,99986 | 0,99290 | 0,03128 |
| » 0 » 2 | 0,24 | 1,82 | 51,38 | 0,99986 | 0,99290 | 0,00000 |
| » 2 » 4 | 1,31 | 16,20 | 37,47 | 0,99550 | 0,06325 | 0,00012 |
| » 4 » 6 | 0,68 | 18,52 | 23,36 | 0,99962 | 0,02998 | 0,00551 |
| » 6 » 7 | — | — | — | — | — | — |

L'interpolazione eseguita dal disegnatore *A* dell'istogramma 5, asimmetrico e con rettangoli aventi la base di tre unità, ha fornito una curva molto meno conforme delle precedenti alla originaria. È, anzitutto, non simmetrica, e, mantenendosi molto aderente alla forma dell'istogramma, presenta, nel ramo ascendente, una specie di rigonfiamento che fa contrasto con l'andamento uniformemente decrescente del ramo discendente; l'ordinata massima è inoltre di 944 unità e perciò la curva ha un aspetto schiacciato. Questo andamento irregolare è messo in evidenza da l'indice *S*.

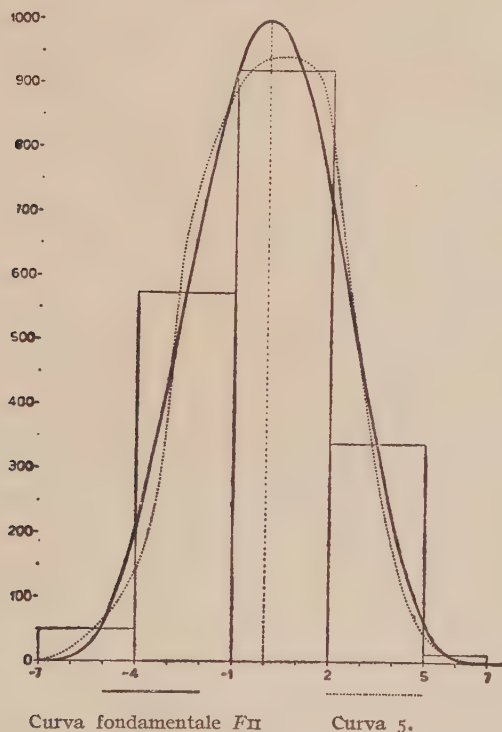
La probabilità *P* è nulla nei tratti corrispondenti agli intervalli (— 6, — 4), (— 4, — 2) ed è piccola negli altri. Le cause della poco buona interpolazione ottenuta sono costituite dalla grande ampiezza della base di ciascun elemento dell'istogramma e dalla sua asimmetria.

I valori abbastanza grandi dell'indice di dissomiglianza negli intervalli estremi si riscontrano in quasi tutte le curve interpolatrici, e mostra la difficoltà di avvicinarsi all'asse *x* con lo stesso andamento della originaria, tanto da rendere molto rilevante la differenza esi-

stente tra i due tratti estremi delle due curve, in confronto alla piccolezza dell'area da essi racchiusa.

Esaminati nel complesso i risultati dell'interpolazione dei tre diversi istogrammi di questo tipo — abbastanza semplice, ma, d'altra parte, molto frequente nelle applicazioni statistiche — possiamo dire che bisogna dare al disegnatore un istogramma simmetrico per poter

GRAFICO 5.



ottenere una curva interpolatrice simmetrica abbastanza conforme alla curva teorica, specie se l'ampiezza di ogni elemento di istogramma non è grande.

§ 16. — *Tipo III.*

Con questo tipo di curve possiamo incominciare a confrontare, sia coll'originaria sia tra loro, le curve ottenute dall'interpolazione di istogrammi identici.

Le curve interpolatrici degli istogrammi 6 e 7, aventi gli elementi di ampiezza unitaria, simmetricamente posti rispetto al punto

TAVOLA V. — Indici D , SeI' , per le curve interpolatrici degli istogrammi 6, 7, 8 e 9.
(Tipo III)

| Intervallo | Area relativa compresa tra la curva F_{III} e la | | | | Sostantamento relativo dell'area differenziale | | | | Indice relativo di dissomiglianza (moltiplicato 100) tra le distribuzioni subordinate da F_{III} e dalla | | | |
|-------------------|---|---------|---------|---------|--|---------|---------|---------|--|---------|---------|---------|
| | curva 6 | curva 7 | curva 8 | curva 9 | curva 6 | curva 7 | curva 8 | curva 9 | curva 6 | curva 7 | curva 8 | curva 9 |
| Da -3 a -2 | 0,311 | 0,716 | 0,124 | 0,302 | -0,143 | -0,807 | +0,141 | -0,104 | 8,472 | 22,644 | 2,776 | 3,685 |
| » -2 » -1 | 0,154 | 0,191 | | | +0,633 | +0,783 | | | 4,568 | 5,598 | | |
| » -1 » 0 | 0,039 | 0,046 | 0,030 | 0,017 | -0,732 | -0,865 | -0,666 | +0,490 | 1,238 | 1,474 | 0,500 | 0,328 |
| » 0 » 1 | 0,031 | 0,035 | | | -0,823 | -0,888 | | | 0,976 | 1,133 | | |
| » 1 » 2 | 0,020 | 0,028 | 0,035 | 0,071 | +0,261 | +0,297 | +0,167 | -0,365 | 0,626 | 0,806 | 0,976 | 2,220 |
| » 2 » 3 | 0,011 | 0,008 | | | -0,079 | -0,037 | | | 0,309 | 0,157 | | |
| » 3 » 4 | 0,003 | 0,002 | 0,009 | 0,105 | -0,008 | -0,008 | -0,018 | +0,355 | 0,050 | 0,043 | 0,209 | 3,206 |
| » 4 » 5 | 0,009 | 0,003 | | | +0,052 | -0,023 | | | 0,256 | 0,144 | | |
| » 5 » 6 | 0,013 | 0,009 | 0,019 | 0,077 | -0,063 | +0,056 | -0,057 | -0,235 | 0,330 | 0,287 | 0,533 | 2,332 |
| » 6 » 7 | 0,012 | 0,014 | | | +0,082 | -0,003 | | | 0,331 | 0,350 | | |
| » 7 » 8 | 0,018 | 0,018 | 0,021 | 0,085 | -0,096 | -0,096 | +0,033 | +0,242 | 0,438 | 0,397 | 0,399 | 2,329 |
| » 8 » 9 | 0,034 | 0,017 | | | -0,169 | +0,042 | | | 0,910 | 0,390 | | |
| » 9 » 10 | 0,036 | 0,015 | 0,035 | 0,087 | -0,036 | -0,071 | 0 | -0,236 | 0,401 | 0,164 | 0,205 | 2,035 |
| » 10 » 11 | 0,070 | 0,039 | | | +0,140 | -0,070 | | | 1,634 | 0,412 | | |
| » 11 » 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0,049 | -0,064 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| » 12 » 13 | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | |
| Intervallo totale | 0,045 | 0,060 | 0,042 | 0,063 | +0,049 | +0,008 | +0,047 | -0,100 | 0,134 | 0,154 | 0,161 | 0,239 |

Curva F_{III} : fondamentale disegnata per punti.
 » 6: interpolatrice dell'istogramma con elementi di ampiezza uno (Disegnatore B)
 » 7: » » uno (» D).
 » 8: » » due (» A).
 » 9: » » due (» C).

zero di ordinata massima — tracciate rispettivamente dai due disegnatori *B* e *D* — si differenziano poco tra loro, tranne che nel primo intervallo $(-3, -2)$, perchè la prima curva parte dall'asse delle ascisse e segue, in questo intervallo, un andamento di quasi uniforme inclinazione, mentre la seconda comincia con un'ordinata eguale a 71 ed è poco inclinata. Ciò è reso ben manifesto dal confronto (vedasi tav. V) fra i tre indici D_r , S ed I_r : nell'intervallo $(-3, -2)$ essi presentano le massime differenze, mentre nei successivi intervalli si differenziano pochissimo.

La diversità di andamento tra queste due curve e la fondamentale si manifesta, oltre che nell'intervallo $(-3, -2)$, nella parte alta, principalmente, perchè quivi le due curve interpolatrici, seguono molto da vicino la forma dell'istogramma, sono un po' schiacciate, ed hanno una ordinata massima di 958 in corrispondenza del centro dell'intervallo $(0, 1)$. Questa diversità è resa nota quantitativamente dall'indice S , il cui segno denota l'andamento pochissimo inclinato, rispetto alla fondamentale, delle due curve interpolatrici negli intervalli $(-1, 0)$, $(0, 1)$, e quello più inclinato negli intervalli contigui $(-2, -1)$, $(1, 2)$. Negli altri intervalli gli indici D_r , S ed I_r sono abbastanza piccoli e ciò conferma la già rilevata aderenza tra la curva originaria e le due curve interpolatrici.

Il metodo del Pearson conferma la bontà dell'interpolazione nel tratto discendente, al di là del punto di ascissa 2, mentre assegna all'indice P calcolato per il ramo ascendente, un valore nullo; l'indice χ^2 mostra, più dettagliatamente, la cattiva interpolazione di detto ramo, specie della curva 7.

TAVOLA VI. — Indici χ^2 e P per le curve interpolatrici degli istogrammi 6, 7, 8 e 9.

| Intervallo | χ^2 | | | | P | | | |
|------------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | Curva 6 | Curva 7 | Curva 8 | Curva 9 | Curva 6 | Curva 7 | Curva 8 | Curva 9 |
| Da -3 a -2 | 345,90 | 14257,08 | 146,46 | 1052,25 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 |
| » -2 » 0 | 103,07 | 167,51 | 35,07 | 21,48 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00022 | 0,01063 |
| » 0 » 2 | 8,13 | 12,94 | 8,63 | 18,44 | 0,52155 | 0,16565 | 0,47312 | 0,03078 |
| » 2 » 5 | 0,28 | 0,27 | 2,96 | 44,06 | 0,99984 | 0,99985 | 0,96538 | 0,00001 |
| » 5 » 8 | 0,17 | 0,09 | 0,26 | 4,44 | 0,99990 | 0,99995 | 0,99985 | 0,87749 |
| » 8 » 10 | 0,13 | 0,04 | 0,06 | 1,06 | 0,99993 | 0,99998 | 0,99997 | 0,99896 |
| » 10 » 12 | 0,10 | 0,05 | 0,04 | 0,32 | 0,99994 | 0,99997 | 0,99998 | 0,99982 |
| » 12 » 13 | — | — | — | — | — | — | — | — |

GRAFICO 6.

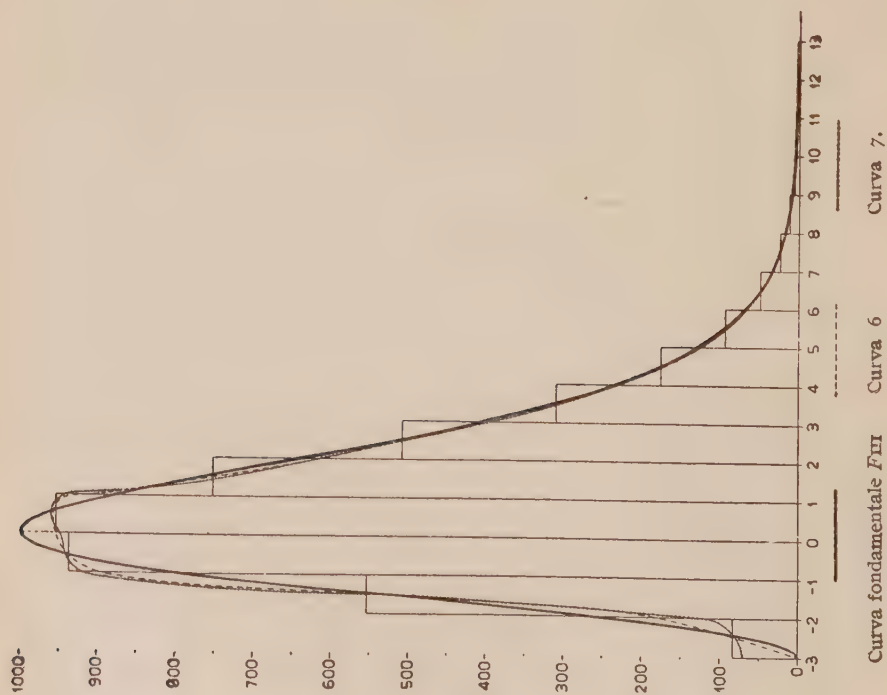
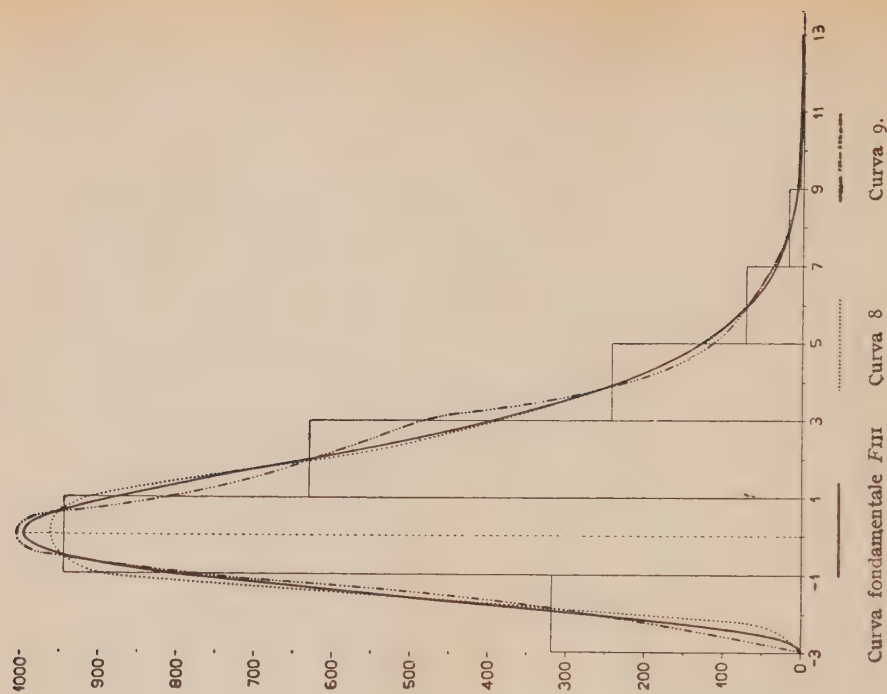


GRAFICO 7.



I due istogrammi con elementi di base due, pur essendo identici, hanno dato luogo a curve alquanto differenti. L'ampiezza dell'intervallo rende più vago il tracciamento della curva interpolatrice, e solo un disegnatore addestrato sa trovare una forma regolare che si avvicina all'originaria. Così in questo caso l'interpolatore *A*, più esperto, ha tracciato una curva — la 8 — che rispecchia abbastanza bene la fondamentale, pur essendo un po' più tozza di questa nella parte superiore, con un massimo a 963 unità. Questa divergenza è messa in evidenza dall'alto valore negativo — 0.666 dell'indice *S* e dai valori positivi di *S* negli intervalli contigui.

L'adesione tra i diversi tratti della detta curva interpolatrice e i corrispondenti tratti della fondamentale, calcolata in rapporto ai valori delle aree racchiuse da questi tratti, è data da *D*, e dall'indice di dissomiglianza. Facciamo notare che detta adesione è minima nell'intervallo ($-3, -1$), perchè ivi la curva interpolatrice è molto arcuata.

La curva interpolatrice dell'istogramma 9, tracciata dal disegnatore *C*, ha una forma poco conforme all'originale; essa ha un rigonfiamento nelle vicinanze del punto di ascissa 3, e manca inoltre di raccordo con l'asse *x* nel punto iniziale. I valori di *S*, rispecchiando l'inclinazione della curva, fanno vedere, coi loro segni alternati, l'andamento non troppo regolare di questa curva interpolatrice.

I valori dell'indice relativo di dissomiglianza, calcolato per i singoli intervalli di due unità, sono maggiori di uno, tranne che nell'intervallo ($-1, 1$) nel quale questa curva riproduce, con buona approssimazione, la curva fondamentale. Il suo punto culminante ha l'ordinata 1007.

I valori di *P* e di κ^2 mostrano che, nel complesso, la curva 8 costituisce il miglior risultato ottenuto tra le quattro interpolazioni eseguite per questo tipo, mentre la curva 9, forse anche per la poca perizia del disegnatore *C*, essendo stata questa tra le prime interpolazioni grafiche da lui eseguite, ha un andamento alquanto diverso da quello della fondamentale.

A conclusione di questi risultati, è opportuno mettere in evidenza un fatto che trova conferma nei risultati di altre interpolazioni. La moda delle quattro curve 6, 7, 8, e 9 è rispettivamente 0.5, 0.5, 0.1, 0.0, cioè cade nel punto di mezzo dell'elemento più alto del rispettivo istogramma. Pertanto l'interpolazione dei primi due istogrammi di questo tipo, pur essendo più facile dell'interpolazione degli altri due istogrammi con elementi di ampiezza doppia dei precedenti, è risultata non tanto buona, perchè non s'è saputo individuare la giusta

posizione del punto di massima ordinata, posizione che influisce fortemente nel determinare l'esatto andamento delle curve pearsoniane.

Conviene osservare inoltre che il disegnatore più esperto in questo genere di operazioni statistiche, ha dato, a parità di condizioni, la curva interpolata più conforme alla fondamentale.

§ 17. — *Tipo IV.*

Le due equazioni (IV_1^*) e (IV_2^*), dedotte dalla equazione (IV) del Pearson, rappresentate graficamente, danno luogo, come mostrano i grafici, a due curve di aspetto diverso. È perciò necessario, esaminare separatamente i risultati dell'interpolazione degli istogrammi ricavati dalle equazioni dette.

1) La curva rappresentata dalla (IV_1^*), è molto slanciata e perciò gli istogrammi da essa dedotti hanno la massima altezza sensibilmente inferiore all'ordinata massima della curva; ne è derivato che gl'interpolatori hanno costruito delle curve alquanto più basse della fondamentale. Tutti e quattro gli indici, D_r , S , I_r' e χ^2 (cfr. tav. VII e VIII) raggiungono il massimo valore nei due intervalli $(-1, 0)$, $(1, 0)$ mentre negli altri hanno piccoli valori.

Le curve ricavate dai due istogrammi 10 e 11, identici e con elementi di base uno, si differenziano non molto tra loro. Ambedue le curve hanno la moda prossima al punto centrale dell'intervallo $(-1, 0)$, sul quale è l'elemento più alto dei due istogrammi, ma la curva 10 ha in questo punto l'ordinata di 714 unità, e la 11 l'ordinata di 688.

Riferendoci all'intervallo totale notiamo che D_r ha rispettivamente i valori 0,320 e 0,324, S i valori $-0,486$ e $-0,527$, e I_r' 0,695 e 0,787, cioè le due curve interpolatrici lasciano a desiderare una maggiore adesione all'originale. L'uniforme andamento delle due curve non dà luogo ad alcuna osservazione degna di rilievo sui disegnatori B e C che hanno eseguite le interpolazioni.

L'istogramma 12 ha gli elementi di base due e simmetricamente posti rispetto al punto zero; la corrispondente curva interpolatrice, tracciata dal disegnatore A , raggiunge per $x = -0,8$ la massima ordinata $y = 414$ (molto più piccola della massima ordinata 1000 della curva fondamentale), e perciò l'indice relativo di disomiglianza (moltiplicato 100), nell'intervallo $(-2, 0)$, raggiunge

TAVOLA VII. — Indici D_r , S e I_r per le curve interpolatrici degli istogrammi IO, II, I2 e I3.
(Tipo IV₁)

| Intervallo | Area relativa compresa tra la curva Fv ₁ e la | | | | Sostantamento relativo dell'area differenziale | | | | Indice relativo di dissomiglianza (moltiplicato 100) tra le distribuzioni subordinate da Fv ₁ e dalla | | | |
|-------------------|---|----------|----------|----------|--|----------|----------|----------|--|----------|----------|----------|
| | curva IO | curva II | curva I2 | curva I3 | curva IO | curva II | curva I2 | curva I3 | curva IO | curva II | curva I2 | curva I3 |
| Da -8 a -7 | 0 | 0 | 0,021 | 0 | 0 | 0 | + 0,362 | 0 | 0 | 0 | 0,658 | 0 |
| » -7 » -6 | 0 | 0 | 0,035 | 0,084 | 0 | 0 | — 0,219 | — 0,259 | 0 | 0 | 0 | 2,297 |
| » -6 » -5 | 0 | 0,035 | 0,060 | 0,087 | + 0,047 | + 0,353 | — 0,063 | — 0,101 | 0,338 | 0,842 | 0,856 | 1,538 |
| » -5 » -4 | 0,012 | 0,079 | 0,277 | 0,037 | 0 | — 0,379 | + 0,547 | — 0,028 | 0,031 | 2,474 | 7,837 | 0,508 |
| » -4 » -3 | 0,004 | 0,044 | 0,277 | 0,037 | + 0,090 | + 0,161 | — 0,843 | — 0,763 | 0,764 | 1,416 | 20,642 | 11,110 |
| » -3 » -2 | 0,027 | 0,147 | 0,720 | 0,548 | — 0,145 | + 0,148 | — 0,306 | + 0,075 | 1,706 | 2,224 | 10,217 | 1,594 |
| » -2 » -1 | 0,003 | 0,364 | 0,597 | 0,106 | — 0,658 | — 0,825 | — 0,026 | 0 | 8,894 | 10,939 | 0,284 | 0 |
| » -1 » 0 | 0,315 | 0,360 | 0,597 | 0,106 | — 0,390 | + 0,238 | — 0,026 | — 0,651 | 9,007 | 8,440 | 2,952 | 1,688 |
| » 0 » 1 | 0,378 | 0,133 | 0,597 | 0,106 | — 0,259 | + 0,238 | — 0,026 | — 0,651 | 3,710 | 3,865 | 0,284 | 0 |
| » 1 » 2 | 0,133 | 0,036 | 0,018 | 0 | + 0,196 | — 0,118 | — 0,026 | — 0,651 | 1,976 | 1,377 | 0,284 | 0 |
| » 2 » 3 | 0,060 | 0 | 0,018 | 0 | 0 | 0 | — 0,026 | — 0,651 | 0 | 0 | 0,284 | 0 |
| » 3 » 4 | 0 | 0 | 0,018 | 0 | 0 | 0 | — 0,026 | — 0,651 | 0 | 0 | 0,284 | 0 |
| Intervallo Totale | 0,320 | 0,324 | 0,667 | 0,469 | — 0,486 | — 0,527 | — 0,633 | — 0,651 | 0,695 | 0,787 | 2,952 | 1,688 |

Curva Fv₁: fondamentale disegnata per punti.

» IO: interpolatrice dell'istogramma con elementi di ampiezza uno (Disegnatore B).

» II: » » » uno (» C).

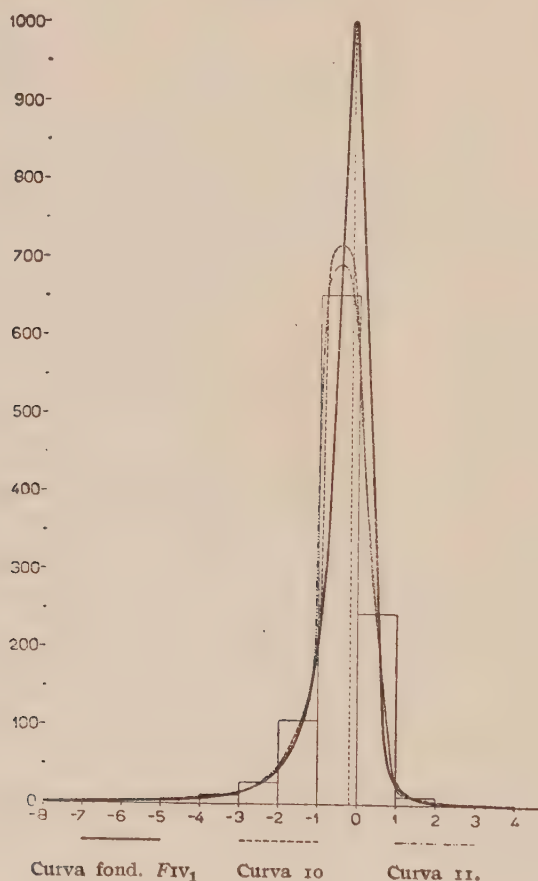
» I2: » » » due e simmetricamente posti rispetto allo zero (Disegnatore A).

» I3: » » » due (Disegnatore F).

il notevole valore 20,642, e anche negli intervalli contigui si mantiene elevato; analogamente per l'indice S e D_r .

I valori di x^2 e delle probabilità P confermano la cattiva interpolazione in tutto il tratto $(-2, 2)$.

GRAFICO 8.



Nell'intervallo totale i tre indici D_r , S e I_r' sono piuttosto grandi e cioè rispettivamente 0,667, — 0,633 e 2,952, e mostrano la notevole differenza esistente tra la curva interpolatrice e l'originaria.

Più vicina alla fondamentale è invece la curva tracciata dal disegnatore F , interpolando l'istogramma 13. Ciò dipende in parte dall'avere questo istogramma il punto $x = -\frac{1}{6}$, che corrisponde alla

GRAFICO 9.

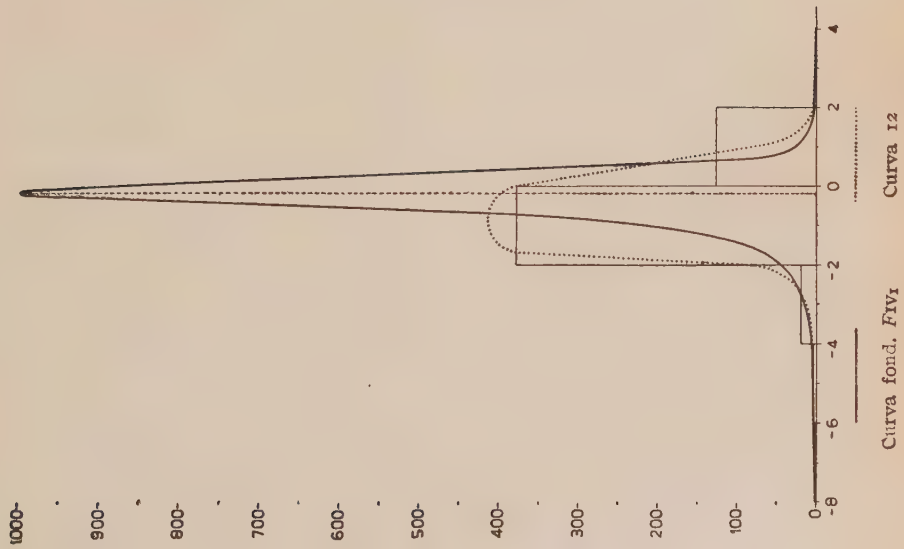
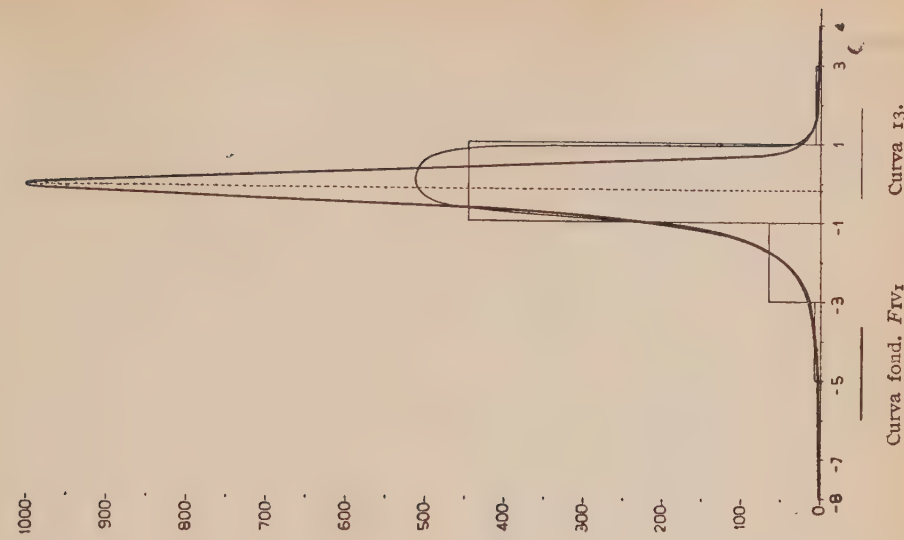


GRAFICO 10.



moda della curva fondamentale, nell'interno dell'elemento più alto dell'istogramma. Il punto di culminazione quindi, pur avendo un'ordinata di appena 514 unità, ha una ascissa non molto diversa da $-1/6$ e di conseguenza l'andamento generico della curva interpolatrice non è tanto dissimile da quello della originaria quanto nel caso precedente.

La probabilità P è nulla solo nell'intervallo $(-1, 1)$ mentre negli altri è vicina all'unità.

TAVOLA VIII. — *Indici χ^2 e P per le curve interpolatrici degli istogrammi 10, 11, 12 e 13.*

| Intervallo | χ^2 | | | | P | | | |
|------------|----------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|----------|
| | Curva 10 | Curva 11 | Curva 12 | Curva 13 | Curva 10 | Curva 11 | Curva 12 | Curva 13 |
| Da -8 a -5 | 0,00 | 0,01 | 0,10 | 0,19 | 1,00000 | 1,00000 | 0,99994 | 0,99989 |
| » -5 » -2 | 0,04 | 0,55 | 7,15 | 0,46 | 0,99998 | 0,99969 | 0,62167 | 0,99974 |
| » -2 » -1 | 5,10 | 39,00 | 6739,65 | 2,05 | 0,82487 | 0,00005 | 0,00000 | 0,99011 |
| » -1 » 0 | 937,09 | 1307,10 | 1592,36 | 909,29 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 |
| » 0 » 1 | 572,17 | 494,17 | 1325,57 | 12.523,74 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 |
| » 1 » 2 | 2,31 | 2,27 | 267,72 | 1,89 | 0,98304 | 0,98304 | 0,00000 | 0,99235 |
| » 2 » 4 | 0,05 | 0,02 | 0,02 | 0,06 | 0,99997 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99997 |

Complessivamente dobbiamo riconoscere la difficoltà, da parte degli operatori, di intuire, dagli istogrammi presentati, la forma molto slanciata della curva originaria. Essi, infatti, hanno elevato le loro curve sempre poco al di sopra dell'elemento più alto dell'istogramma come se avessero timore ad allontanarsi dalla sagoma dell'istogramma, ed è questo un difetto che si riscontra in quasi tutte le interpolazioni grafiche, eseguite da disegnatori privi di nozioni sul fenomeno rappresentato; è dunque bene che lo studioso che si serve di queste interpolazioni tenga il debito conto di questa deficienza.

2) La curva tracciata dal disegnatore A interpolando l'istogramma 14, a rettangoli di base uno, cioè di cm. 5 secondo l'unità

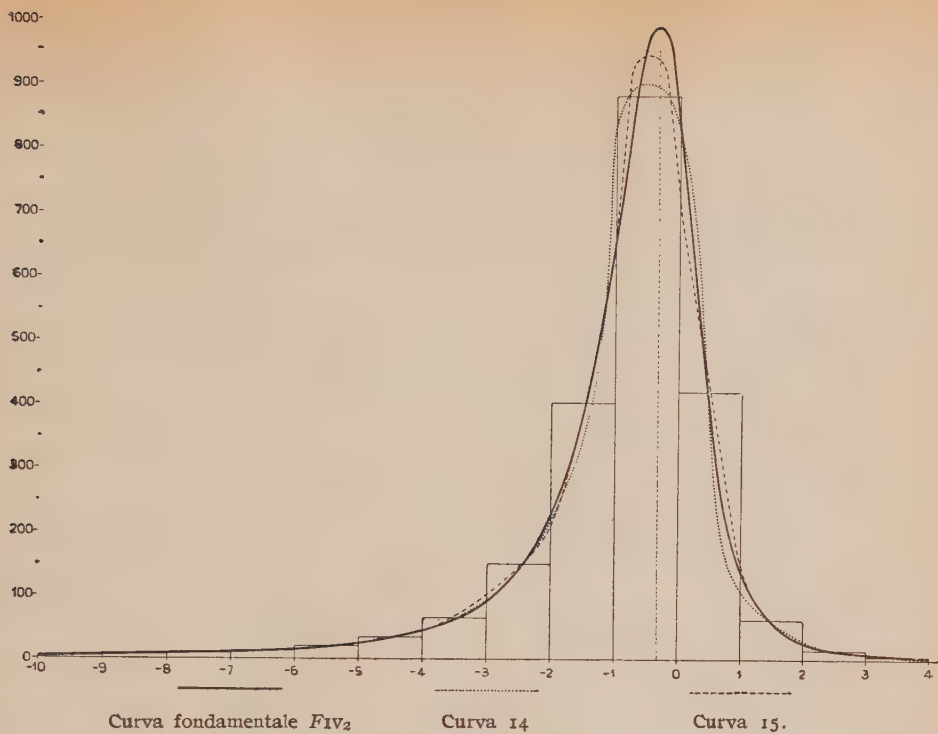


GRAFICO I2.

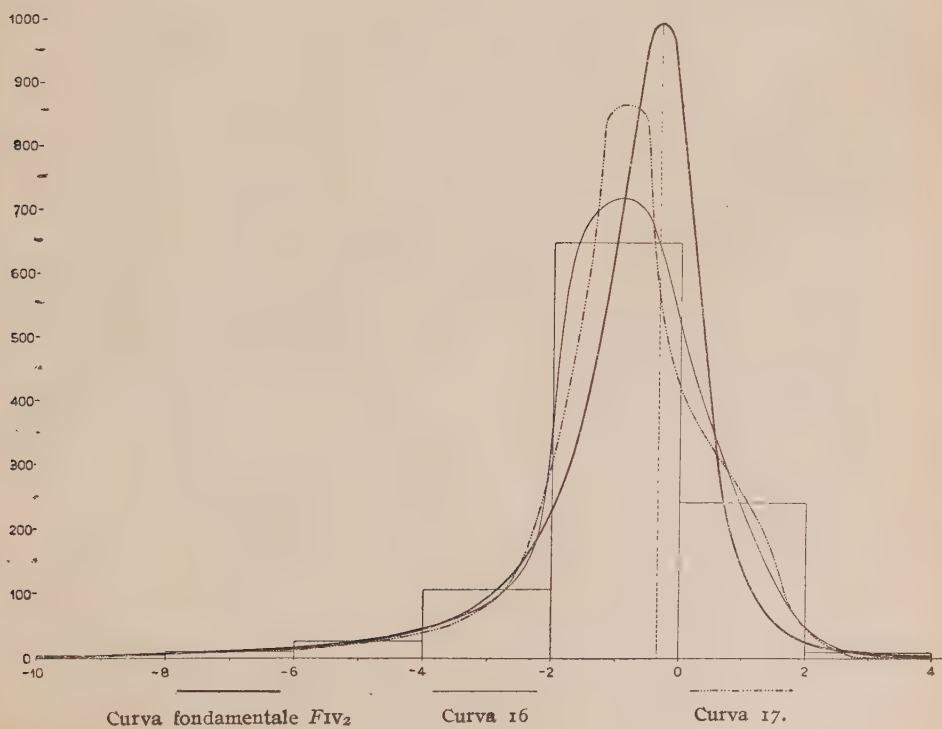


TAVOLA IX. — Indici D , S e I' , per le curve interpolatrici degli istogrammi 14, 15, 16 e 17.(Tipo IV₂)

| Intervallo | Area relativa compresa tra la curva Fv_1 e la | | | | Scostamento relativo dell'area differenziale | | | | Indice relativo di disomogeneità (moltiplicato 100) tra le distribuzioni subordinate da Fv_1 e dalla | | | |
|-------------------|--|----------|----------|----------|--|----------|----------|----------|--|----------|----------|----------|
| | curva 14 | | curva 15 | | Curva 14 | | Curva 15 | | curva 14 | | curva 15 | |
| | curva 14 | curva 15 | curva 16 | curva 17 | Curva 14 | Curva 15 | Curva 16 | Curva 17 | curva 14 | curva 15 | curva 16 | curva 17 |
| Da -10 a -9 | 0,085 | 0 | 0,187 | 0,252 | + 0,909 | 0 | + 0,075 | + 1,163 | 1,867 | 0 | 5,900 | 7,788 |
| » -9 » -8 | 0,007 | 0,027 | | | 0 | | | | 0,069 | 0,600 | | |
| » -8 » -7 | 0,012 | 0 | 0,029 | 0,074 | + 0,122 | 0 | 0 | - 0,143 | 0,300 | 0 | 0,876 | 2,338 |
| » -7 » -6 | 0 | 0,010 | | | 0 | | + 0,085 | | 0 | 0,249 | | |
| » -6 » -5 | 0 | 0,010 | 0,014 | 0,041 | 0 | | - 0,038 | + 0,044 | 0 | 0,187 | 0,238 | 1,313 |
| » -5 » -4 | 0,012 | 0,020 | | | - 0,079 | | - 0,135 | | 0,307 | 0,600 | | |
| » -4 » -3 | 0,006 | 0,014 | 0,109 | 0,152 | - 0,008 | + 0,057 | + 0,145 | + 0,339 | 0,099 | 0,437 | 2,356 | 4,148 |
| » -3 » -2 | 0,016 | 0,058 | | | - 0,060 | - 0,249 | | | 0,407 | 1,743 | | |
| » -2 » -1 | 0,081 | 0,026 | 0,351 | 0,349 | + 0,175 | + 0,051 | - 0,753 | - 0,303 | 1,760 | 0,612 | 10,477 | 9,368 |
| » -1 » 0 | 0,088 | 0,071 | | | - 0,790 | - 0,182 | | | 2,420 | 2,105 | | |
| » 0 » 1 | 0,110 | 0,104 | 0,372 | 0,499 | + 0,247 | - 0,211 | - 0,402 | - 0,532 | 2,672 | 2,868 | 9,574 | 12,966 |
| » 1 » 2 | 0,135 | 0,044 | | | - 0,306 | - 0,053 | | | 4,152 | 0,928 | | |
| » 2 » 3 | 0,093 | 0,031 | 0,379 | 0,633 | + 0,375 | + 0,119 | + 0,710 | + 1,020 | 2,760 | 0,737 | 10,448 | 17,271 |
| » 3 » 4 | 0,174 | 0,059 | | | + 0,591 | + 0,236 | | | 4,556 | 2,148 | | |
| Intervallo totale | 0,073 | 0,063 | 0,319 | 0,355 | + 0,118 | - 0,124 | - 0,505 | - 0,323 | 0,267 | 0,177 | 1,329 | 1,377 |

Curva Fv_1 : fondamentale disegnata per punti.

» 14: interpolatrice dell'istogramma con elementi di ampiezza uno (Disegnatore A).

» 15: » » uno (» B).

» 16: » » due (» E).

» 17: » » due (» C).

di misura fissata sull'asse x per rappresentare graficamente l'equazione (IV₂*), si discosta dalla fondamentale principalmente nella parte alta della curva e nel ramo discendente.

I tre indici che compaiono nella tav. IX hanno negli ultimi intervalli i valori più grandi. Il massimo valore di S è $-0,790$ e indica che nell'intervallo $(-1, 0)$ la curva, a confronto della fondamentale, si mantiene aderente al lato superiore dell'elemento più alto dell'istogramma.

I valori elevati dei tre indici D , S ed I' negli intervalli estremi dipendono dal fatto che la curva fondamentale è asintotica all'asse x , mentre quella interpolata ha un inizio quasi aderente al detto asse e termina poi nel punto $x = 4$ con ordinata zero.

I valori di κ^2 e di P (cfr. tav. X) mostrano la poco buona interpolazione nel tratto dell'intervallo $(-2, 1)$.

L'interpolazione, eseguita dal disegnatore B , dell'istogramma 15, identico al precedente, ha dato luogo ad una curva con andamento sufficientemente conforme a quello della fondamentale.

Nel tratto iniziale la curva riproduce anche le forma asintotica, mentre nel tratto finale essa raggiunge l'asse x contrariamente alla originaria che ha l'andamento pure asintotico.

I valori di P mostrano che l'interpolazione è abbastanza buona tranne che nel tratto compreso tra $x = -1$ e $x = 1$, dove, per altro, i valori non elevati di κ^2 mostrano che l'andamento di questa curva interpolatrice, anche in questo intervallo, è discreto.

Questa seconda interpolazione è dunque migliore della precedente eseguita su un identico istogramma.

Paragonando i risultati delle due interpolazioni dell'istogramma con colonne di ampiezza uno, dobbiamo notare che le due curve ottenute hanno poca somiglianza tra loro, fatta eccezione per la moda che coincide, per ambedue, con l'ascissa del centro dell'intervallo $(-1, 0)$ anzichè con $x = -1/3$; le ordinate dei punti di culminazione sono invece rispettivamente di 911 e 961 unità. Notiamo, inoltre, che la parte più alta di esse è quasi simmetrica, mentre la forma asimmetrica dell'istogramma mette in evidenza che il ramo ascendente debba essere meno inclinato di quello discendente.

TAVOLA X. — Indici x^2 e P per le curve interpolatrici degli istogrammi 14, 15, 16 e 17.

| Intervallo | x^2 | | | | P | | | |
|-------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | Curva 14 | Curva 15 | Curva 16 | Curva 17 | Curva 14 | Curva 15 | Curva 16 | Curva 17 |
| Da -10 a a_{-6}^{II} | 0,39 | 0,01 | 2,11 | 3,66 | 0,99978 | 1,00000 | 0,98848 | 0,92939 |
| » -6 » -2 | 0,06 | 0,98 | 2,50 | 7,16 | 0,99997 | 0,99945 | 0,97788 | 0,62064 |
| » -2 » -1 | 40,30 | 5,14 | 1624,45 | 935,35 | 0,00001 | 0,82109 | 0,00000 | 0,00000 |
| » -1 » -0 | 97,32 | 60,31 | 717,88 | 1024,87 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 |
| » 0 » 1 | 74,10 | 64,37 | 403,93 | 672,11 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 |
| » 1 » 2 | 15,37 | 1,65 | 633,76 | 1289,43 | 0,08204 | 0,99426 | 0,00000 | 0,00000 |
| » 2 » 4 | 1,90 | 0,24 | 19,06 | 52,44 | 0,99226 | 0,99986 | 0,02476 | 0,00000 |

Più difficile si è presentata l'interpolazione dei due identici istogrammi con colonne di ampiezza due, corrispondenti a cm. 10 sul foglio di disegno. Si deve principalmente a questa notevole ampiezza se le curve interpolatrici degli istogrammi 16 e 17 si differenziano molto dalla fondamentale, e solo in piccola parte alla scarsa perizia dei rispettivi operatori E e C .

La curva 16 ha l'ascissa del punto di culminazione uguale — 1 e l'ordinata di 720 unità, invece che rispettivamente — $1/3$ e 1000 come nella fondamentale. A causa di questa forma lo scostamento relativo dell'area differenziale negli intervalli (— 2, 0) e (0, 2) raggiunge rispettivamente i valori — 0,753 e — 0,402, e così l'indice I' , assume gli alti valori 10,477 e 9,574.

Negli estremi dell'intervallo totale, questa curva raggiunge l'asse x contrariamente all'originaria che è asintotica a questo asse. Ne segue che gli indici D_r , S ed I' assumono negli intervalli estremi valori abbastanza grandi.

Anche l'indice P conferma la poco buona interpolazione.

Analogamente la curva 17 è molto dissimile dalla fondamentale. La massima ordinata è di 868 unità e la moda è, come al solito,

presso il centro dell'intervallo $(-2, 0)$ sul quale è l'elemento più alto dell'istogramma.

Questa curva interpolatrice nell'intervallo $(0, 2)$ presenta un rigonfiamento (il gradino dell'istogramma sembrava al disegnatore troppo sporgente perchè la curva avesse in questo tratto un andamento uniforme) e perciò l'indice di dissomiglianza è in detto intervallo eguale a 12,966.

Nei tratti estremi questa curva, ha, in forma più accentuata, lo stesso difetto riscontrato nella precedente, e perciò tanto i valori di D , quanto quelli di S ed I' sono molto grandi.

La probabilità P ha sempre valori nulli tranne che nel tratto di curva compresa tra $x = -10$ e $x = -2$.

Come si vede, dunque, i risultati delle interpolazioni di questo tipo sono poco soddisfacenti, principalmente a cagione della grande ampiezza — rispettivamente di cm. 5 e cm. 10 — di ciascuna colonna dei due tipi di istogrammi costruiti.

L'adesione maggiore tra la curva fondamentale e quella interpolata si ha per un lungo tratto del ramo ascendente, perchè l'istogramma mostra chiaramente l'andamento uniforme di questo tratto.

È poi da rilevare, come è avvenuto per gli altri tipi, il difetto di voler seguire quasi rasentando il contorno dell'istogramma; le forme spesso accidentate delle curve interpolatrici dipendono da questa tendenza dei disegnatori.

§ 18. — *Tipo V.*

L'interpolazione dell'istogramma 18 — con elementi di ampiezza unitaria — eseguita dal disegnatore A , ha dato luogo ad una curva molto conforme alla fondamentale. Ciò era da aspettarsi perchè l'istogramma si presentava, a paragone dei precedenti, in condizioni favorevoli per far capire l'andamento della curva originaria. Difatti, per la scala di misura adottata sulle ascisse, l'ampiezza di ciascun elemento è breve (cm. 2), inoltre la moda della curva fondamentale cade nell'interno dell'intervallo $(4, 5)$ sul quale è l'elemento più alto dell'istogramma, cosa che contribuisce a fare ottenere una curva interpolatrice che abbia le coordinate del punto di culminazione prossime a quelle della fondamentale. La determinazione dell'andamento della curva si presentava dunque di facile individuazione.

I valori di D , S ed I' (cfr. tav. XI), calcolati per i singoli intervalli, sono abbastanza piccoli, e si annullano addirittura negli intervalli

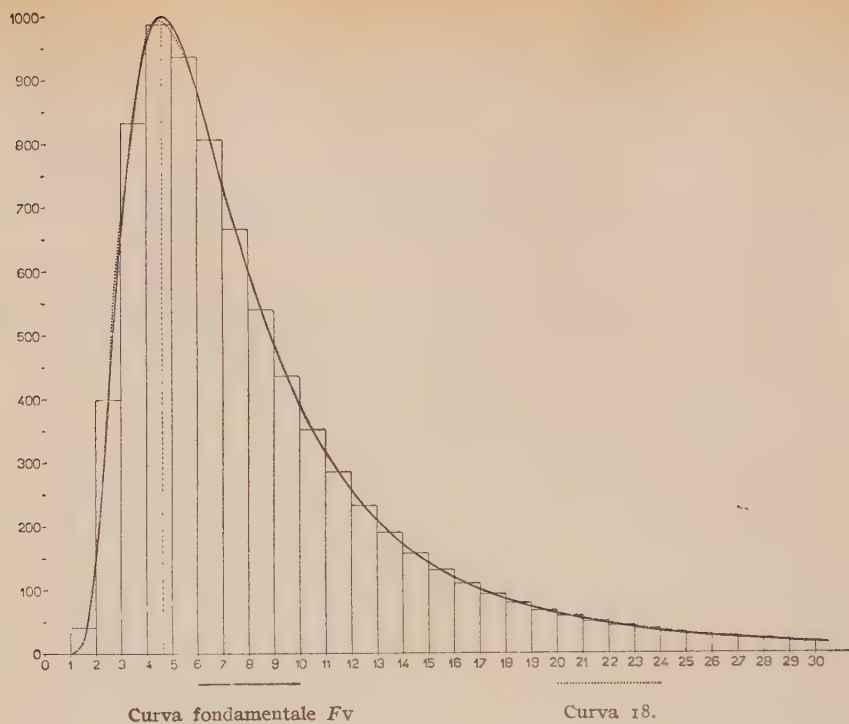
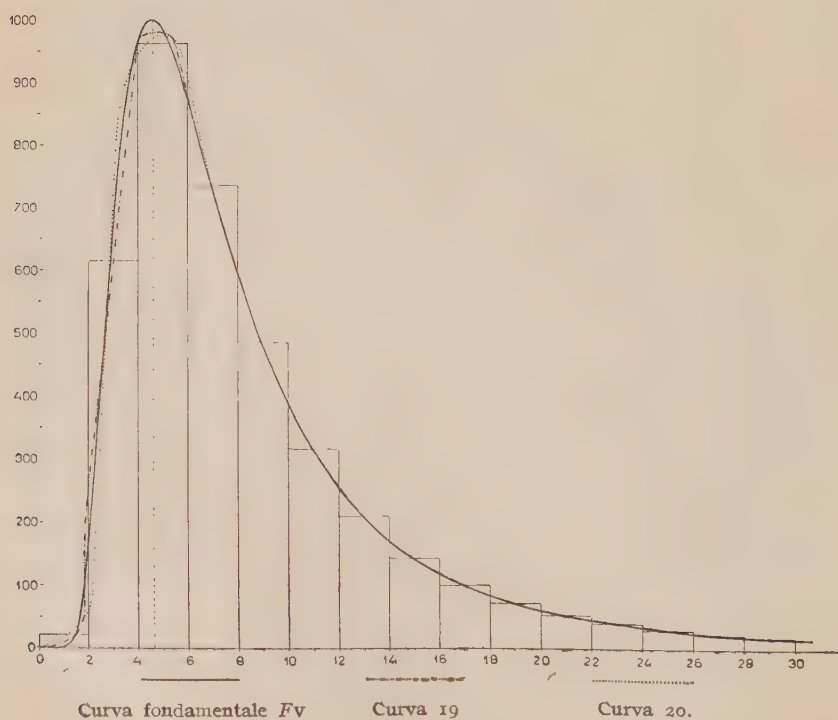


GRAFICO 14.



in cui è $x > 13$, perchè le piccolissime differenze nelle ordinate corrispondenti della curva interpolata e della fondamentale dipendono da imprecisioni di disegno. La dissomiglianza maggiore si ha nel tratto dell'intervallo (2, 3) in cui la curva ha una piccola flessione.

L'indice P (cfr. tav. XII) conferma la bontà dell'interpolazione, specie nel ramo discendente della curva.

Più difficile si è presentata l'interpolazione dei due istogrammi, 19 e 20, identici, con l'ampiezza di ogni colonna eguale a due unità, cioè, sul foglio di carta millimetrata, eguale a 4 cm.

La diversità tra curva originaria e curve interpolatrici si manifesta quasi esclusivamente nei primi tre intervalli, perchè, nei successivi, la forma dell'istogramma mostra bene l'andamento uniformemente decrescente della curva fondamentale.

Ambedue le curve interpolatrici hanno l'ordinata massima di poco inferiore a 1000, perchè esse, come al solito, si allontanano poco dall'altezza dell'elemento più alto dell'istogramma che in questo caso è di 965; inoltre l'ascissa del punto di culminazione di queste due curve ha un valore prossimo al valore centrale dell'intervallo (4, 6), e quindi differisce poco da $x = 4,61$ che è la moda della curva fondamentale. L'indice S nell'intervallo (4, 6) assume per ambedue le curve il massimo in valore assoluto, però col segno negativo, indicando che le due curve hanno in questo intervallo, un andamento più orizzontale di quello della fondamentale. È da rilevare che un notevole valore negativo di S si ottiene, in generale, ogni qualvolta l'ordinata massima della curva interpolata è inferiore a quella della fondamentale.

Il massimo della dissomiglianza si ha nel primo intervallo (0, 2) perchè era difficile intuire che la curva fondamentale si conservasse aderente all'asse x per quasi metà intervallo e poi s'innalzasse bruscamente. Detto massimo ha il valore 2,503 per la curva 19, tracciata dal disegnatore C , mentre esso è uguale a 16,024 per la curva 20 che in questo tratto ha la forma somigliante ad un ampio arco di cerchio. Questo inizio molto incurvato è una caratteristica che troviamo in buon numero delle interpolazioni eseguite dal disegnatore A , quello che ha tracciato la curva 20. Anche l'interpolazione dell'istogramma 18 è stata fatta dallo stesso disegnatore A , ma non si riscontra in essa alcuna altra tendenza caratteristica.

La probabilità P (vedasi tav. XII) è nulla nell'intervallo (da 1 a 3,5) mentre negli intervalli successivi i suoi valori, piuttosto prossimi all'unità, confermano la bontà dell'interpolazione.

TAVOLA XI. — *Indici D, S e I', per le curve interpolatrici degli istogrammi 18, 19 e 20.*

(Tipo V)

| Intervallo | | | Area relativa compresa tra la curva Fv e la | | | Scostamento relativo dell'area differenziale | | | Indice relativo (moltiplicato 100) di dissemi- glianza tra le distribuzioni subordinate da Fv e dalla | | |
|-------------------------|--|--|--|----------|----------|--|----------|----------|---|----------|----------|
| | | | curva 18 | curva 19 | curva 20 | curva 18 | curva 19 | curva 20 | curva 18 | curva 19 | curva 20 |
| Da o a 1 | | | 0 | 0,234 | 0,546 | 0 | — 0,030 | — 0,463 | 0 | 2,503 | 16,024 |
| » 1 » 2 | | | 0,036 | | | + 0,046 | | | 0,668 | | |
| » 2 » 3 | | | 0,053 | 0,071 | 0,084 | + 0,164 | — 0,182 | + 0,201 | 1,455 | 1,603 | 1,965 |
| » 3 » 4 | | | 0,011 | | | — 0,029 | | | 0,173 | | |
| » 4 » 5 | | | 0,006 | 0,012 | 0,023 | — 0,268 | — 0,331 | — 0,593 | 0,180 | 0,316 | 0,685 |
| » 5 » 6 | | | 0,005 | | | — 0,171 | | | 0,153 | | |
| » 6 » 7 | | | 0,002 | 0,003 | 0,014 | + 0,100 | — 0,022 | + 0,122 | 0,078 | 0,059 | 0,278 |
| » 7 » 8 | | | 0,003 | | | — 0,050 | | | 0,070 | | |
| » 8 » 9 | | | 0 | 0,002 | 0,004 | 0 | — 0,012 | — 0,036 | 0,005 | 0,055 | 0,050 |
| » 9 » 10 | | | 0,002 | | | — 0,031 | | | 0,035 | | |
| » 10 » 11 | | | 0,002 | 0,001 | 0,002 | 0 | — 0,012 | + 0,016 | 0,028 | 0,038 | 0,045 |
| » 11 » 12 | | | 0,001 | | | 0 | | | 0,010 | | |
| » 12 » 13 | | | 0,002 | 0,004 | 0,003 | + 0,022 | + 0,024 | + 0,036 | 0,068 | 0,093 | 0,094 |
| » 13 » 14 | | | 0 | | | 0 | | | 0 | | |
| » 14 » 15 | | | 0 | 0 | 0,003 | 0 | 0 | — 0,019 | 0 | 0 | 0,062 |
| » 15 » 16 | | | 0 | | | 0 | | | 0 | | |
| » 16 » 17 | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| » 17 » 18 | | | 0 | | | 0 | | | 0 | | |
| » 18 » 19 | | | | | | | | | 0 | | |
| » 19 » 20 | | | | | | | | | 0 | | |
| » 20 » 21 | | | | | | | | | 0 | | |
| » 21 » 22 | | | | | | | | | 0 | | |
| » 22 » 23 | | | | | | | | | 0 | | |
| » 23 » 24 | | | | | | | | | 0 | | |
| » 24 » 25 | | | | | | | | | 0 | | |
| » 25 » 26 | | | | | | | | | 0 | | |
| » 26 » 27 | | | | | | | | | 0 | | |
| » 27 » 28 | | | | | | | | | 0 | | |
| » 28 » 29 | | | | | | | | | 0 | | |
| » 29 » 30 | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| Intervallo Totale . . . | | | 0,006 | 0,017 | 0,026 | + 0,032 | — 0,112 | + 0,050 | 0,023 | 0,053 | 0,051 |

Curva Fv : fondamentale disegnata per punti.

» 18 : interpolatrice dell'istogramma con elementi di ampiezza uno (Disegnatore A).

» 19 : » » » due (» C).

» 20 : » » » due (» A).

TAVOLA XII. — *Indici x^2 e P per le curve interpolatrici degli istogrammi 18, 19 e 20.*

| Intervallo | x^2 | | | P | | |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | Curva 18 | Curva 19 | Curva 20 | Curva 18 | Curva 19 | Curva 20 |
| Da 0 a 1 | — | — | — | — | — | — |
| » 1 » 3,5 | 6,44 | 76,04 | 205,42 | 0,69469 | 0,00000 | 0,00000 |
| » 3,5 » 6 | 0,42 | 3,86 | 5,86 | 0,99976 | 0,91882 | 0,75313 |
| » 6 » 11 | 0,02 | 0,09 | 1,05 | 0,99999 | 0,99995 | 0,99904 |
| » 11 » 16 | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 1,00000 | 1,00000 | 0,99999 |
| » 16 » 30 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 |

I risultati delle tre interpolazioni eseguite per il V tipo sono dunque abbastanza soddisfacenti; ciò dipende principalmente dall'uniforme andamento delle curve di questo tipo, specie nel ramo discendente dove è pochissimo risentita l'influenza dell'ampiezza dell'intervallo.

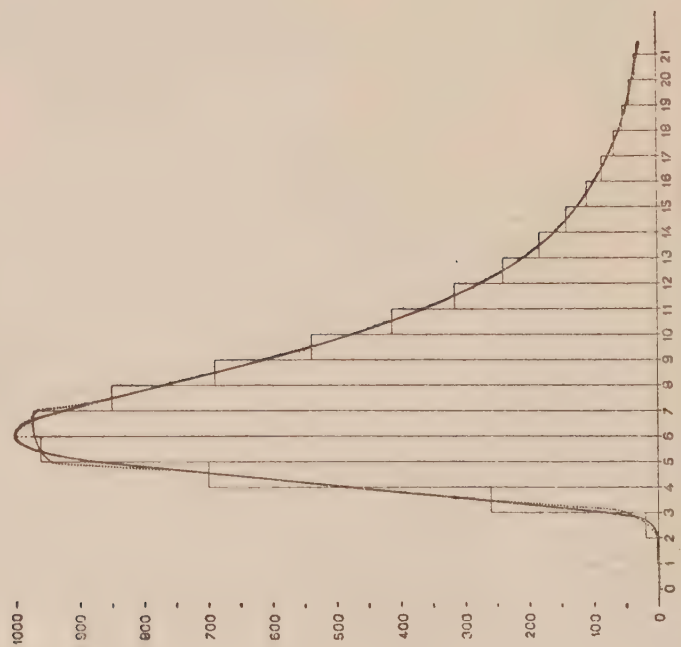
§ 19. — *Tipo VI.*

L'andamento delle curve di questo tipo è molto simile a quello delle curve del tipo V, perciò avremo, come in precedenza, una diversità notevole tra curva originaria e curva interpolatrice solo nel tratto ascendente e nella parte culminante, mentre nel ramo discendente la detta diversità sarà quasi trascurabile.

L'istogramma 21 — interpolato dal disegnatore A — con colonne di ampiezza uno, cioè di cm. 2, ha dato luogo ad una curva con andamento sufficientemente conforme alla fondamentale.

Il massimo valore di D_r e di I_r' (vedasi tav. XIII) si ha nell'intervallo (2, 3), perchè quivi la curva interpolatrice non segue, come l'originaria un andamento prima tangenziale all'asse x per poi elevarsi rapidamente fino al valore 80 dell'ordinata, ma si eleva gradatamente con andamento curvilineo fino ad avere una ordinata eguale a 49. Si riscontra quindi quella stessa caratteristica, posta già in rilievo nel

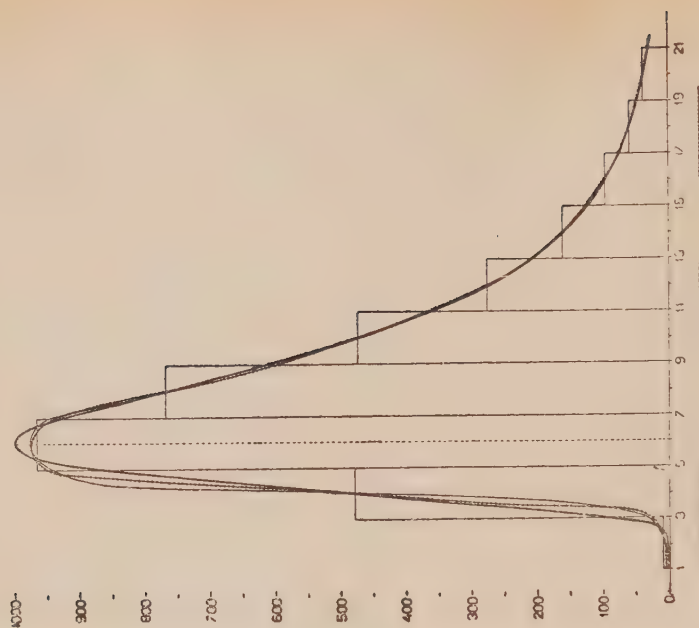
GRAFICO 15.



Curva fond. Fiv

Curva 21.

GRAFICO 16.



Curva fond. Fvi

Curva 22

Curva 23.

paragrafo precedente, di cui sono affette la maggior parte delle curve tracciate dal disegnatore *A*.

Nei due intervalli successivi, la detta curva interpolatrice ha un andamento più inclinato dell'originaria (vedasi i valori di *S* nella tavola XIII) e poi piega quasi bruscamente per seguire molto da vicino i due tratti orizzontali delle due colonne dell'istogramma di altezze rispettive 961 e 973; l'indice *S* rispecchia questa forma poco inclinata con i due valori — 0,776 e — 0,926. La moda della curva fondamentale è nel punto $x = 6$, mentre quella della curva interpolatrice è nel punto $x = 6,6$.

Il ramo discendente non presenta molta dissomiglianza dall'analogo ramo della curva originaria.

I valori di *P* (cfr. tav. XIV) mostrano che l'interpolazione è buona solo nel ramo discendente.

La curva tracciata dal disegnatore *E* interpolando l'istogramma 22 con elementi di ampiezza due, segue nell'intervallo (1, 3) un andamento poco inclinato abbastanza dissimile da quello dell'originaria. Nell'intervallo successivo si eleva, invece, più del corrispondente tratto della fondamentale, per poi incurvarsi e culminare con una ordinata di 977 unità, che supera di 9 unità la colonna più alta dell'istogramma; l'ascissa del punto di culminazione corrisponde al valore centrale dell'intervallo (5, 7) sul quale si appoggia tale colonna più alta, e quindi coincide con la moda della curva originaria.

Il ramo discendente si differenzia pochissimo da quello della fondamentale; i piccoli valori di I_r' dipendono principalmente da imperfezioni nel tracciare le curve messe a confronto.

La curva 23 è ottenuta interpolando un istogramma identico al precedente. Operatore della interpolazione è stato il disegnatore *D*.

Una particolarità di questa curva è il suo inizio con ordinata uguale 5, anziché 0; il primo tratto di curva si mantiene parallelo all'asse x per quasi metà dell'intervallo (1, 3) e poi incomincia ad elevarsi lentamente, e perciò, in detto intervallo, $D_r = 0,775$, lo scostamento relativo $S = -0,836$ e l'indice I_r' raggiunge il notevole valore 21,781.

Nell'intervallo successivo (3, 5) i valori dei tre indici D_r , S ed I_r' sono inferiori a quelli calcolati nello stesso intervallo per la curva precedente, mentre in tutti gli altri intervalli, le parti si invertono.

Per ambedue le curve — 22 e 23 — la probabilità *P* è nulla nell'intervallo (2, 4,5), è molto piccola nell'intervallo (4,5, 7), negli intervalli successivi è prossima all'unità.

TAVOLA XIII. — *Indici D_r , S e I_r' per le curve interpolatrici degli istogrammi 21, 22 e 23.*
(Tipo VI)

| Intervallo | Area relativa compresa tra la curva F_{VI} e la | | | Scostamento relativo dell'area differenziale | | | Indice relativo (moltiplicato 100) di disomigianza tra le distribuzioni subordinate da F_{VI} e dalla | | |
|-------------------------|--|----------|----------|--|----------|----------|---|----------|----------|
| | curva 21 | curva 22 | curva 23 | curva 21 | curva 22 | curva 23 | curva 21 | curva 22 | curva 23 |
| Da 1 a 2 | 0 | 0,618 | 0,775 | 0 | — 0,753 | — 0,836 | 0 | 12,680 | 21,781 |
| » 2 » 3 | 0,305 | | | — 0,289 | | | 7,165 | | |
| » 3 » 4 | 0,055 | 0,222 | 0,094 | + 0,123 | + 0,484 | + 0,196 | 1,463 | 5,562 | 3,226 |
| » 4 » 5 | 0,032 | | | + 0,184 | | | 0,903 | | |
| » 5 » 6 | 0,023 | 0,016 | 0,018 | — 0,776 | — 0,650 | — 0,678 | 0,732 | 0,285 | 0,353 |
| » 6 » 7 | 0,020 | | | — 0,926 | | | 0,649 | | |
| » 7 » 8 | 0,014 | 0,015 | 0,018 | + 0,283 | + 0,128 | + 0,175 | 0,442 | 0,454 | 0,550 |
| » 8 » 9 | 0,003 | | | — 0,053 | | | 0,100 | | |
| » 9 » 10 | 0,001 | 0,005 | 0,016 | + 0,006 | — 0,023 | — 0,102 | 0,018 | 0,123 | 0,445 |
| » 10 » 11 | 0 | | | — 0,004 | | | 0,010 | | |
| » 11 » 12 | 0,001 | 0,003 | 0,011 | — 0,012 | + 0,013 | + 0,084 | 0,020 | 0,060 | 0,355 |
| » 12 » 13 | 0 | | | — 0,006 | | | 0,010 | | |
| » 13 » 14 | 0 | 0,002 | 0,015 | 0 | — 0,015 | — 0,112 | 0 | 0,060 | 0,459 |
| » 14 » 15 | 0,001 | | | — 0,005 | | | 0,018 | | |
| » 15 » 16 | 0,001 | 0,004 | 0,007 | + 0,014 | — 0,027 | — 0,046 | 0,035 | 0,113 | 0,213 |
| » 16 » 17 | 0,004 | | | + 0,059 | | | 0,125 | | |
| » 17 » 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| » 18 » 19 | 0 | | | 0 | | | 0 | | |
| » 19 » 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| » 20 » 21 | 0 | | | 0 | | | 0 | | |
| Intervallo totale . . . | 0,019 | 0,051 | 0,033 | — 0,011 | + 0,151 | + 0,016 | 0,054 | 0,125 | 0,085 |

Curva F_{VI} : fondamentale disegnata per punti.

» 21: interpolatrice dell'istogramma con elementi di ampiezza uno (Disegnatore A).

» 22: » » » due (» E).

» 23: » » » due (» D).

TAVOLA XIV. — *Indici χ^2 e P per le curve interpolatrici degli istogrammi 21, 22 e 23.*

| Intervallo | χ^2 | | | P | | |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | Curva 21 | Curva 22 | Curva 23 | Curva 21 | Curva 22 | Curva 23 |
| Da 1 a 2 | — | — | — | — | — | — |
| » 2 » 4,5 | 19,48 | 264,31 | 98,05 | 0,02170 | 0,00000 | 0,00000 |
| » 4,5 » 7 | 5,72 | 36,94 | 14,55 | 0,76635 | 0,00014 | 0,10506 |
| » 7 » 12 | 0,82 | 0,96 | 1,72 | 0,99954 | 0,99946 | 0,99370 |
| » 12 » 17 | 0,11 | 0,14 | 0,35 | 0,99994 | 0,99992 | 0,99980 |
| » 17 » 21 | — | — | — | — | — | — |

Esaminati nel complesso i risultati delle interpolazioni eseguite per questo tipo, rileviamo che essi sono meno buoni di quelli ottenuti nel paragrafo precedente, pur essendo, l'ampiezza delle colonne degli istogrammi considerati, rispettivamente di cm. 2 e cm. 4 come quelle degli istogrammi del tipo V. Ciò non dipende soltanto dalla diversa abilità degli operatori: difatti notiamo che il disegnatore *A*, a parità di ampiezza dell'intervallo, ha eseguito, per quest'ultimo tipo, una interpolazione meno buona di quella eseguita per il precedente. Si rileva invece una maggiore difficoltà nell'interpolazione di un istogramma proveniente da una curva del tipo VI, specie se la base di ciascun elemento è di due unità e la moda coincide con l'estremo comune di due intervalli; allora l'istogramma ha i due elementi più alti di altezze poco differenti, e il disegnatore, che traccia in generale la curva molto radente ai tratti orizzontali di detti elementi, altera quindi notevolmente l'andamento della parte alta della curva stessa.

È opportuno mettere infine in rilievo, analogamente a quanto si è fatto nel paragrafo precedente, la bontà dell'interpolazione nel tratto del ramo discendente corrispondente ad ascisse superiori a $x = 7,5$.

§ 20. — Tipo VII.

L'istogramma 24, simmetrico rispetto al punto zero di ordinata massima e con la base di ogni colonna eguale a cm. 4 (due unità), dà una visione abbastanza netta dell'andamento simmetrico della curva originaria. La sua interpolazione, eseguita dal disegnatore *B*, è soddisfacente. Il massimo valore di *S*, come risulta dalla tav. XV, è + 0,424 e si ha in corrispondenza dell'intervallo $(-1, 1)$, perchè la curva interpolatrice ha il massimo a 1006, e conseguentemente nella parte alta la sua forma è più affusolata.

La maggiore dissomiglianza ($I_r' = 1,466$) si ha negli intervalli estremi in cui il disegnatore non ha indicato la forma asintotica all'asse di base, ma ha fatto rispettivamente iniziare e terminare la curva con ordinata zero.

GRAFICO 17.

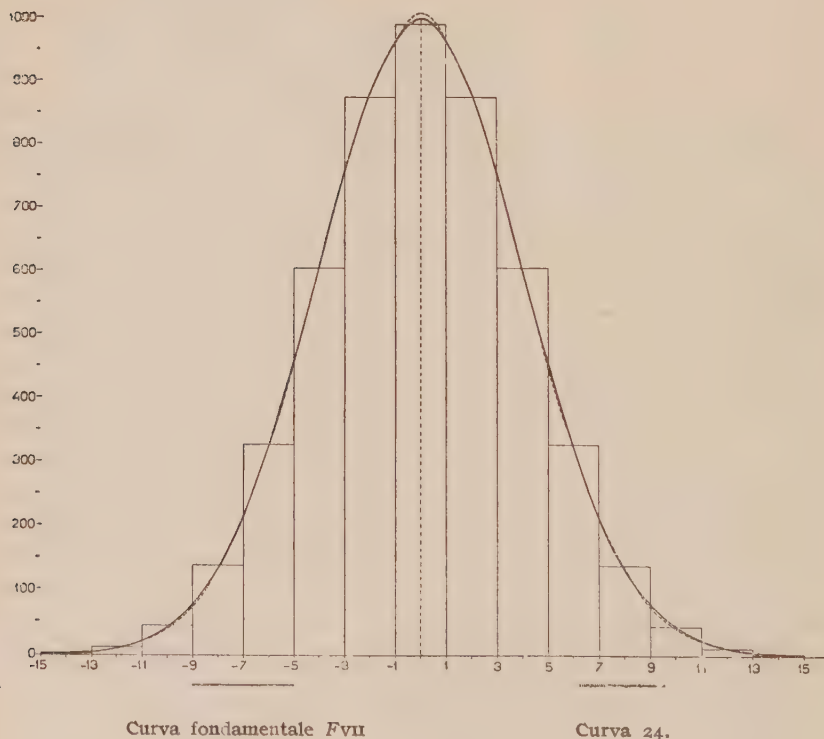
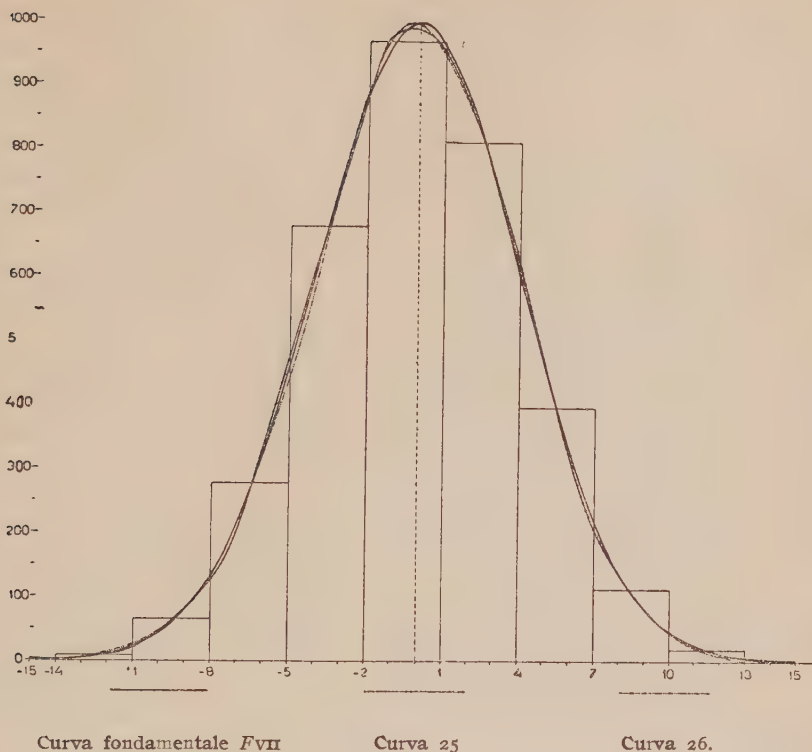


GRAFICO 18.



Tutti i valori di P (cfr. tav. XVI), calcolati nei vari tratti, sono prossimi all'unità e confermano la bontà dell'interpolazione.

Non tanto conforme all'originaria è la curva tracciata dal disegnatore D interpolando l'istogramma 25 con elementi di 3 unità, cioè cm. 6, di ampiezza, e asimmetrico. Questa curva rispecchia la forma asimmetrica dell'istogramma e perciò il suo massimo è, come il centro della base dell'elemento più alto, spostato un poco a sinistra dello zero; il suo ramo ascendente è più inclinato del ramo discendente. Il massimo valore dei tre indici D , S ed I' è nel primo intervallo (-14 , -11) perchè quivi la curva ha un andamento più orizzontale del corrispondente tratto della originaria.

I valori di P sono abbastanza grandi e rivelano che, nel complesso, l'interpolazione è buona.

TAVOLA XVI. — Indici κ^2 e P per le curve interpolatrici degli istogrammi 24, 25 e 26.

| Intervallo | κ^2 | | | P | | |
|--------------|------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | Curva 24 | Curva 25 | Curva 26 | Curva 24 | Curva 25 | Curva 26 |
| Da -15 a -10 | 0,37 | 3,66 | 3,39 | 0,99979 | 0,92939 | 0,94367 |
| » -10 » -5 | 0,64 | 2,99 | 1,09 | 0,99964 | 0,96457 | 0,99872 |
| » -5 » -0 | 0,21 | 1,89 | 1,33 | 0,99988 | 0,99235 | 0,99681 |
| » 0 » 5 | 0,21 | 1,39 | 2,27 | 0,99988 | 0,99633 | 0,98413 |
| » 5 » 10 | 0,64 | 2,02 | 1,85 | 0,99964 | 0,99093 | 0,99266 |
| » 10 » 15 | 0,37 | 0,13 | 0,66 | 0,99979 | 0,99993 | 0,99963 |

L'istogramma 26, identico al precedente, è stato interpolato dal disegnatore C. La curva tracciata si avvicina discretamente all'originaria; la sua forma asimmetrica è meno spiccata di quella che si è riscontrata nella precedente curva 25. Anche essa non presenta irregolarità di andamento rispetto alla curva originaria, e perciò i valori degli indici D_r , S ed I_r' sono abbastanza piccoli.

Negli intervalli estremi questi valori diventano poco più grandi, perchè la curva interpolatrice non indica la forma asintotica all'asse κ .

La massima ordinata è di 1000 unità; la moda è poco a sinistra dell'origine delle ordinate cui corrisponde la moda della curva fondamentale.

I valori di P sono prossimi ad uno e confermano che l'interpolazione è buona.

Le conclusioni tratte dai risultati delle interpolazioni eseguite per questo tipo di curve simmetriche, sono analoghe a quelle ottenute per il tipo II, costituito pure da curve simmetriche, e cioè: se si presenta al disegnatore un istogramma simmetrico, e soltanto allora, si ottiene una curva simmetrica; l'interpolazione dà buoni risultati a causa della grande regolarità di andamento delle curve di questo tipo, anche se l'ampiezza di base di ogni colonna dell'istogramma è relativamente grande.

§ 21. — Curva dei redditi.

L'esame, fatto sulle tavole XVII e XVIII, dei valori degli indici D_r , S , I_r' e P relativi ai singoli intervalli della curva, tracciata dal disegnatore B, interpolatrice dell'istogramma 27 con colonne di am-

TAVOLA XVII. — *Indici D_r , S e I' , per le curve interpolatrici degli istogrammi 27 e 28.*

(Curva dei redditi)

| Intervallo | Area relativa compresa tra la curva F_R e la | | Scostamento relativo dell'area differenziale | | Indice relativo (moltiplicato 100) di dissomiglianza tra le distribuzioni subordinate da F_R e dalla | |
|--------------------|--|----------|--|----------|--|----------|
| | curva 27 | curva 28 | curva 27 | curva 28 | curva 27 | curva 28 |
| Da 1 a 1.2 . . . | 0,012 | 0,225 | — 0,084 | + 0,253 | 0,323 | 7,118 |
| » 1.2 » 1.4 . . . | 0,003 | 0,020 | + 0,031 | + 0,030 | 0,095 | 0,641 |
| » 1.4 » 1.6 . . . | 0,004 | | — 0,055 | | 0,125 | |
| » 1.6 » 1.8 . . . | 0,002 | 0,004 | + 0,022 | + 0,027 | 0,046 | 0,239 |
| » 1.8 » 2 . . . | 0,002 | | + 0,020 | | 0,047 | |
| » 2 » 2.2 . . . | 0,001 | 0,004 | — 0,013 | + 0,017 | 0,013 | 0,195 |
| » 2.2 » 2.4 . . . | 0,004 | | + 0,074 | | 0,101 | |
| » 2.4 » 2.6 . . . | 0,008 | 0,006 | — 0,152 | — 0,016 | 0,221 | 0,170 |
| » 2.6 » 2.8 . . . | 0,003 | | — 0,051 | | 0,044 | |
| » 2.8 » 3 . . . | 0,005 | 0,007 | + 0,076 | + 0,063 | 0,117 | 0,319 |
| » 3 » 3.2 . . . | 0,005 | | — 0,120 | | 0,194 | |
| » 3.2 » 3,4 . . . | 0,002 | 0,007 | 0 | + 0,069 | 0,018 | 0,355 |
| » 3,4 » 3,6 . . . | 0,005 | | + 0,107 | | 0,130 | |
| » 3,6 » 3,8 . . . | 0,001 | 0,016 | 0 | — 0,239 | 0,013 | 1,037 |
| » 3,8 » 4 . . . | 0,010 | | + 0,311 | | 0,282 | |
| Intervallo totale. | 0,006 | 0,070 | — 0,031 | + 0,078 | 0,029 | 0,318 |

Curva F_R : fondamentale disegnata per punti.

» 27: interpolatrice dell'istogramma con elementi di ampiezza uno (Disegnatore B).

» 28: » » » » » due A).

piezza $1/5$ di unità, cioè di 5 cm., mostra chiaramente quanto poco si differenzia questa curva dall'originaria.

Non egualmente si può dire della curva tracciata dal disegnatore *A* interpolando l'istogramma 28. Questa curva ha inizio dal punto (1,0) anzichè (1,1000), e con andamento rapidamente crescente raggiunge, in corrispondenza del punto di mezzo del primo intervallo (1, 1.2), l'ordinata massima $y = 892$, per poi iniziare un andamento decrescente abbastanza simile a quello della fondamentale.

Nel primo intervallo gli indici D_r , S e I_r' hanno rispettivamente i valori 0,225, + 0,253 e 7,118, mentre nei successivi intervalli questi indici hanno valori abbastanza piccoli se si tiene conto che l'ampiezza di ogni colonna dell'istogramma è di cm. 10. Può sembrare che i valori dei tre indici che si riferiscono al primo intervallo siano insufficienti a mostrare la diversità di andamento tra curva interpolatrice e curva fondamentale in detto intervallo, ma si deve pensare che tanto l'area racchiusa dalla prima colonna dell'istogramma quanto l'area differenziale della fondamentale sono notevolmente elevate, per cui si rende poco sensibile la detta diversità. Sussidia il valore di χ^2 che è uguale a 570,77.

Dalle citate tavole si nota, inoltre, un aumento dei valori di D_r , S ed I_r' nell'ultimo intervallo considerato, ma ciò dipende in parte dall'influenza che, sui piccoli valori delle ordinate sia della curva fondamentale che di quella interpolata, hanno le imprecisioni del disegno e la difficoltà di individuare, in modo preciso, le ordinate dei punti delle due curve.

La probabilità P è nulla nel primo intervallo, mentre nei successivi è abbastanza prossima all'unità.

TAVOLA XVIII. — *Indici χ^2 e P per le curve interpolatrici degli istogrammi 27 e 28.*

| Intervallo | χ^2 | | P | |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|
| | Curva 27 | Curva 28 | Curva 27 | Curva 28 |
| Da 1 a 1,4 | 0,59 | 570,77 | 0,99967 | 0,00000 |
| » 1,4 » 2,2 | 0,02 | 0,18 | 0,99999 | 0,99990 |
| » 2,2 » 3 | 0,04 | 0,04 | 0,99998 | 0,99998 |
| » 3 » 3,8 | 0,03 | 0,05 | 0,99997 | 0,99997 |

GRAFICO 19.

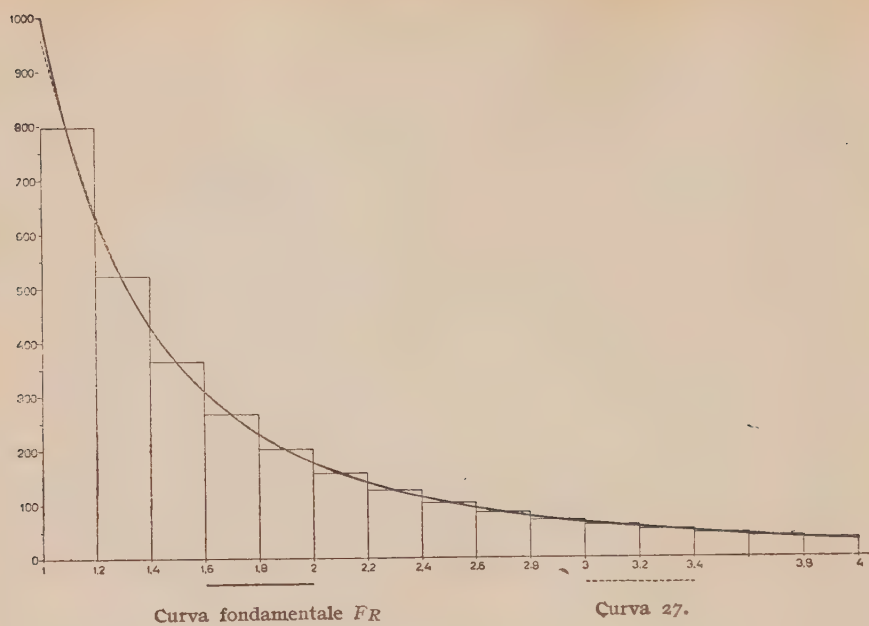
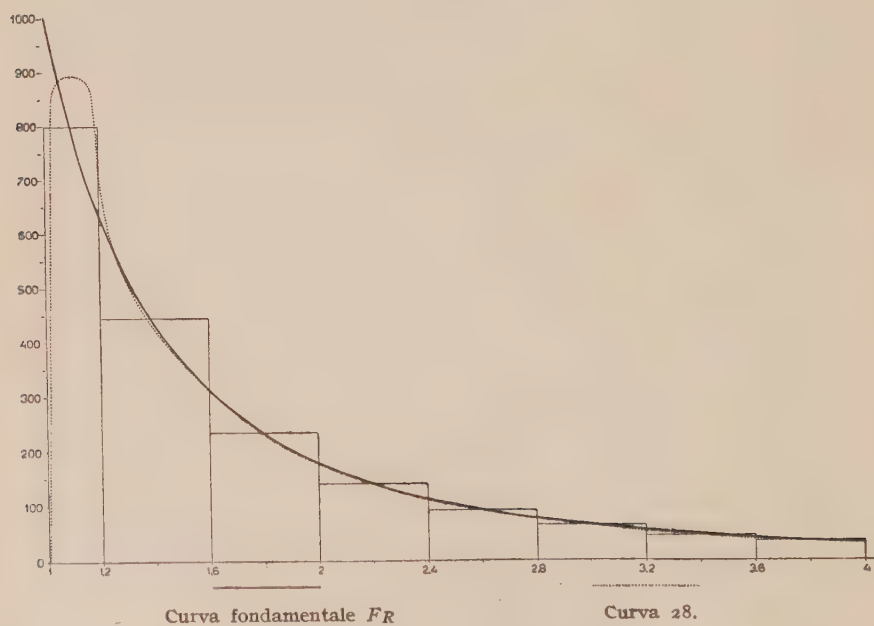


GRAFICO 20.



Dalla curva dei redditi si ottiene quindi un istogramma davanti al quale il disegnatore è incerto se dare alla curva interpolatrice un andamento continuamente decrescente oppure una forma unimodale. Come già fu avvertito al paragrafo 3, bisognerebbe, in questo caso, che lo statistico, in base alla conoscenza del fenomeno, desse dei lumi al disegnatore.

Una volta intuita la forma decrescente non è difficile tracciare la curva interpolatrice anche se gli elementi di istogramma sono ampi. Questo fatto trova riscontro in quanto è stato osservato commentando, nel complesso, i risultati delle interpolazioni eseguite per i tipi V e VI, e cioè che ogni qualvolta si deve costruire un istogramma, per poi interpolarlo, e si prevede un andamento abbastanza uniforme, almeno in un ampio tratto della curva rappresentatrice del fenomeno, si può aumentare, nel detto tratto, la larghezza di ogni colonna senza pregiudicare l'esattezza del risultato.

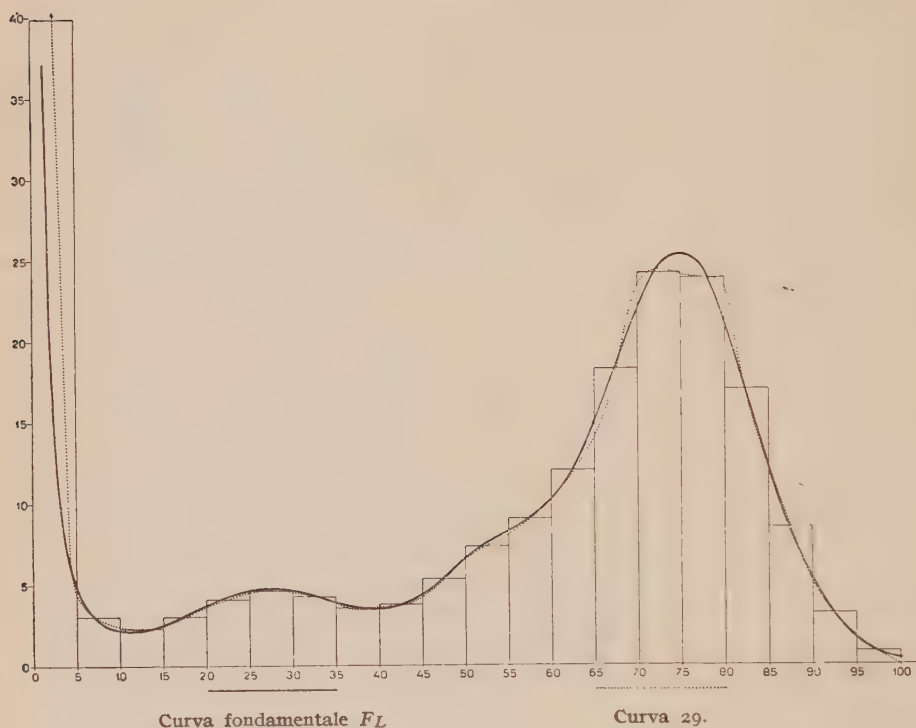
§ 22. — *Curva di Lexis.*

L'unità di misura scelta sull'asse delle ordinate non permette di rappresentare tutto il primo ramo della curva fondamentale, ed inoltre rende l'altezza del primo elemento degli istogrammi, dedotti da questa curva, molto grande rispetto ai limiti dei fogli adoperati di carta millimetrata. I disegnatori che hanno interpolato detti istogrammi hanno compreso l'andamento rapidamente decrescente del primo ramo della curva, ma non potendone disegnare che la parte con ordinate inferiori a 40 unità, cioè a 60 cm., non si sono potuti servire, come al solito, del planimetro per misurare se l'area del primo elemento di istogramma fosse eguale a quella racchiusa dal corrispondente tratto di curva interpolatrice. Essi perciò si sono limitati ad indicarne, valendosi dell'intuito, l'inclinazione. Per questo primo tratto non si sono potuti quindi calcolare i soliti indici; il confronto diretto però permette di far notare la divergenza tra l'inclinazione delle curve interpolatrici e l'inclinazione della fondamentale.

L'interpolazione — eseguita dal disegnatore *A* — dell'istogramma 29, in cui l'ampiezza di ogni rettangolo era di 4 cm., ha dato luogo ad una curva che si differenzia dall'originaria principalmente nel primo tratto, e ciò ha evidentemente influenza anche nel tratto corrispondente all'intervallo successivo (5, 10) dove $D_r = 0,061$, $S = -0,306$ e $I_r' = 1,928$. Nell'intervallo (25, 30) l'area differenziale

del tratto di curva fondamentale è molto piccola mentre quella del tratto di curva interpolatrice è quasi doppia; di conseguenza, l'indice $S = +0,971$, senza che però i valori di D_r e I_r' siano grandi.

GRAFICO 21.



Nel tratto corrispondente all'elevato numero di morti verso i 75 anni, la curva interpolatrice ha il difetto, riscontrato in quasi tutte le altre interpolazioni in prossimità del punto di culminazione, di mantenersi molto aderente all'istogramma, per cui l'ordinata massima è alquanto inferiore a quella della curva originaria; conseguentemente l'indice S ha i notevoli valori negativi $-0,815$ e $-0,881$. Inoltre la curva interpolatrice non indica l'andamento asintotico all'asse x dopo l'età di 100 anni e perciò la diversità tra questa e la fondamentale è notevole in rapporto alla piccola area dell'ultimo elemento dell'istogramma, cosicchè $D_r = 0,183$ e l'indice di dissonigianza ha il valore $5,741$.

Salvo questi difetti, si riconosce che la curva ottenuta ha un

TAVOLA XIX. — Indici D , S e I , per le curve interpolatrici degli istogrammi 29, 30 e 31.
(Curva di Lexis)

| Intervallo | Area relativa compresa tra la curva F_L e la | | | Scostamento relativo dell'area differenziale | | | Indice relativo (moltiplicato 100) di disomiglianza tra le distribuzioni subordinate da F_L e dalla | | |
|--------------------|--|----------|----------|--|----------|----------|---|----------|----------|
| | curva 29 | curva 30 | curva 31 | curva 29 | curva 30 | curva 31 | curva 29 | curva 30 | curva 31 |
| Da 5 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| » 7 $\frac{1}{2}$ | 0,061 | 0,160 | 0,017 | —0,306 | — | — | — | — | — |
| » 10 | 0,033 | — | — | —0,358 | — | — | 1,928 | — | — |
| » 15 | 0,006 | 0,030 | 0,020 | +0,053 | +2,410 | —0,049 | 1,106 | 4,822 | 0,443 |
| » 20 | — | — | — | — | — | — | 0,193 | — | — |
| » 22 $\frac{1}{2}$ | 0,005 | — | — | —0,086 | +0,240 | —0,129 | 0,149 | 0,997 | 0,620 |
| » 25 | 0,007 | 0,018 | 0,021 | +0,074 | —0,275 | +0,459 | 0,114 | 0,574 | — |
| » 30 | 0,006 | — | — | —0,134 | — | — | 0,165 | — | — |
| » 35 | 0,023 | 0,026 | 0,058 | —0,419 | —0,270 | +0,741 | 0,680 | 0,815 | 0,509 |
| » 37 $\frac{1}{2}$ | 0,026 | 0,037 | — | —0,381 | —0,372 | — | 0,818 | — | — |
| » 40 | 0,010 | 0,004 | 0,021 | +0,092 | +0,434 | —0,110 | 0,320 | 1,148 | 1,729 |
| » 45 | 0,011 | — | — | —0,177 | — | — | 0,335 | 0,105 | 0,601 |
| » 50 | 0,006 | 0,006 | 0,007 | +0,107 | +0,073 | +0,038 | 0,189 | 0,192 | — |
| » 52 $\frac{1}{2}$ | 0,017 | 0,013 | — | —0,168 | — | — | 0,527 | 0,195 | 0,196 |
| » 60 | 0,047 | — | — | +0,493 | —0,017 | — | 1,439 | — | — |
| » 67 $\frac{1}{2}$ | 0,033 | 0,036 | 0,062 | —0,815 | —0,394 | —0,379 | 1,050 | 1,078 | 1,726 |
| » 70 | 0,038 | — | — | —0,881 | — | — | 1,238 | — | — |
| » 75 | — | 0,027 | 0,060 | +0,336 | —0,212 | —0,304 | 1,395 | 0,754 | — |
| » 80 | 0,047 | — | — | +0,014 | —0,012 | — | 0,236 | 0,205 | — |
| » 82 $\frac{1}{2}$ | 0,015 | 0,014 | 0,030 | —0,150 | —0,205 | —0,049 | 1,440 | — | — |
| » 85 | 0,044 | — | — | +0,552 | — | +0,742 | 5,741 | 2,994 | 0,689 |
| » 90 | — | 0,098 | 0,244 | — | — | — | — | — | — |
| » 95 | 0,183 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| » 97 $\frac{1}{2}$ | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| » 100 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| Intervallo totale | 0,030 | 0,028 | 0,043 | —0,043 | —0,080 | —0,160 | 0,067 | 0,808 | 0,183 |

Curva F_L : fondamentale designata per punti.

» 29: interpolatrice dell'istogramma con elementi di ampiezza cinque

» 30: » » » sette e mezzo

» 31: » » » dieci

(Disegnatore A).

G).

H).

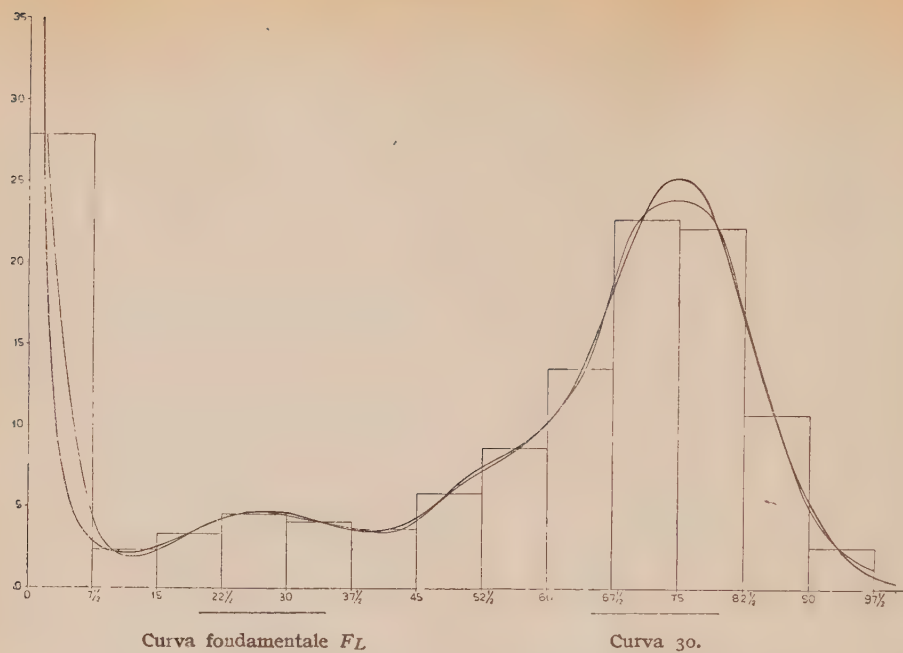
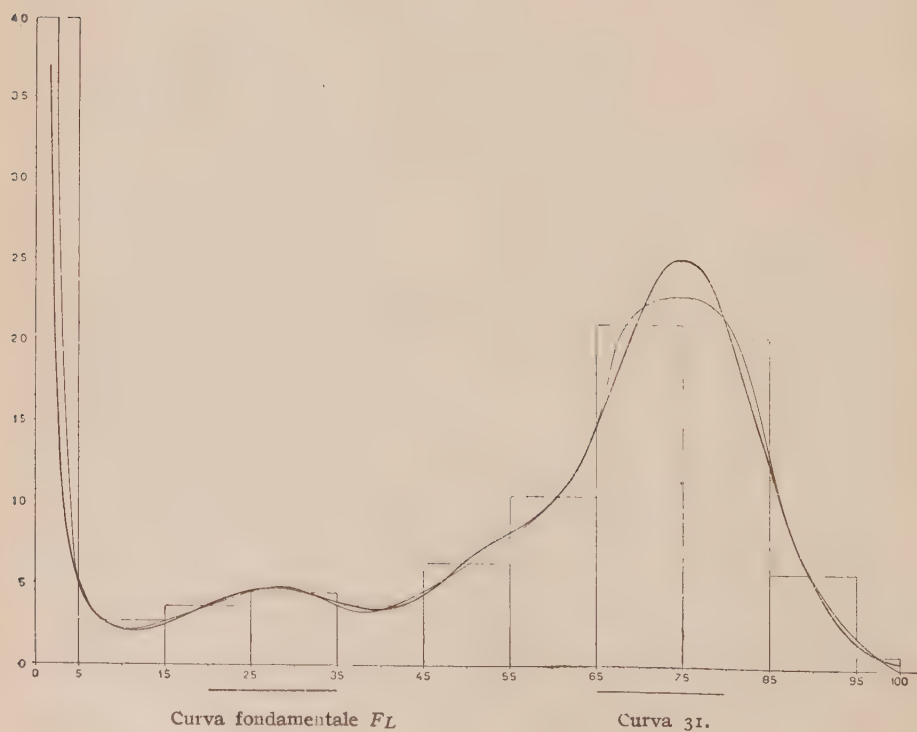


GRAFICO 23.



andamento abbastanza conforme all'originaria, così come lo confermano i valori abbastanza alti di P fatta eccezione nell'intervallo da 70 a 82.5.

TAVOLA XX. — *Indici x^2 e P per le curve interpolatrici degli istogrammi 29, 30 e 31.*

| Intervallo | x^2 | | | P | | |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | Curva 29 | Curva 30 | Curva 31 | Curva 29 | Curva 30 | Curva 31 |
| Da 7,15 a 20 | 1,27 | 20,64 | 0,64 | 0,99729 | 0,01454 | 0,99964 |
| » 20 » 32,5 | 0,07 | 0,83 | 0,40 | 0,99996 | 0,99953 | 0,99978 |
| » 32,5 » 45 | 0,66 | 1,49 | 3,65 | 0,99963 | 0,99553 | 0,92992 |
| » 45 » 57,5 | 0,22 | 0,09 | 1,52 | 0,99988 | 0,99995 | 0,99529 |
| » 57,5 » 70 | 5,85 | 3,50 | 12,68 | 0,75408 | 0,93785 | 0,17883 |
| » 70 » 82,5 | 14,24 | 7,05 | 24,42 | 0,11479 | 0,63197 | 0,00374 |
| » 82,5 » 95 | 3,54 | 2,70 | 9,20 | 0,93574 | 0,97245 | 0,41992 |

Egualemente buona possiamo dire l'interpolazione dell'istogramma 30 avente le basi di ogni colonna di cm. 6. Si deve però tener conto del fatto che l'interpolatore è stato il disegnatore G più anziano e anche più abile degli altri, per quanto nel presente lavoro figura quest'unica volta.

La minore adesione tra questa curva e la fondamentale si ha nel tratto compreso fra le età 7 1/2 e 15, perchè qui si risente ancora l'inclinazione non esatta del primo tratto della curva interpolata. Anche nell'ultimo intervallo da 90 a 97.5 l'indice I_7' ha un valore notevole e ciò perchè il disegnatore ha arrestato la curva ad una ordinata alquanto maggiore di quella della fondamentale. Le oscillazioni sui valori di S dipendono dalla difficoltà di dare la giusta inclinazione a causa dell'ampiezza della base di ogni elemento.

L'indice di dissomiglianza I_7' calcolato per l'intervallo totale da 5 a 97.5 prende l'elevato valore 0.808, perchè è molto sentita la

differenza, sopra notata, tra la curva interpolatrice e l'originaria nel tratto (5, 10).

I valori di P sono generalmente prossimi all'unità, tranne che nel tratto dell'intervallo da 7.5 a 20 per la ragione suddetta.

La curva ottenuta dall'interpolazione dell'ultimo istogramma costruito — con le colonne aventi un'ampiezza di 8 cm., corrispondenti a classi decennali — si differenzia dall'originaria in quanto accentua la convessità della curva verso l'asse x nel tratto tra 15 e 45 anni; lo scostamento relativo S assume perciò il valore 0,741 e l'indice di dissomiglianza I' è uguale a 1,729. Inoltre essa nell'intorno di 75 anni, è meno culminante della fondamentale, e perciò negl'intervalli (65, 75) e (75, 85) l'indice S è rispettivamente eguale a $-0,379$ e $-0,304$, ed I' rispettivamente eguale a 1,726 e 1,729. Infine nell'intervallo (95, 100) la curva interpolatrice si differenzia dall'originaria perchè essa raggiunge l'asse x , invece di indicarne l'andamento àsintotico a quest'asse, e perciò $D_r = 0,244$, $S = 0,742$ ed $I' = 3,823$.

L'indice P (cfr. tav. XX) assume valori prossimi all'unità nel tratto di curva compreso tra $x = 7,5$ e $x = 57,5$, mentre nel rimanente tratto prende valori generalmente piccoli.

Visti nel complesso i risultati delle tre interpolazioni, possiamo dire di aver ottenuto delle curve con andamento molto conforme all'originaria, tenuto conto dell'andamento poco uniforme della curva di Lexis.

Nell'intervallo (0, 5) non è stato possibile, per la ragione suddetta, vedere tutto il ramo di ciascuna curva, ma dal tratto disegnato si può vedere che per avere in questo intervallo un andamento conforme alla fondamentale, si dovrebbe dividerlo in intervalli parziali e costruire un istogramma avente i primi elementi di ampiezza minore di cinque unità. Per il resto della curva può bastare la divisione dell'intervallo totale in intervalli parziali di cinque unità — cioè il raggruppamento del numero dei morti in classi quinquennali d'età — salvo a tenere in debito conto il solito difetto della parte culminante nell'intorno di $x = 75$.

§ 23. — Conclusioni.

Nei paragrafi precedenti di questo capitolo abbiamo messo in rilievo, per ogni tipo di curve e per ogni istogramma costruito, la maggiore o minore adesione delle curve interpolatrici alle rispettive curve fondamentali. Diamo ora uno sguardo d'insieme a tutti i risultati ottenuti cercando di rispondere, come meglio si potrà, ai quesiti

posti nel paragrafo 3. Preferiamo, per comodità del lettore, la forma schematica.

a) *Principali manchevolezze che generalmente si riscontrano nelle curve interpolatrici.*

Anzitutto si deve osservare che i disegnatori nell'eseguire le interpolazioni si sono preoccupati, evidentemente, di allontanarsi il meno possibile dal contorno esterno dell'istogramma, specialmente nella parte culminante, ed hanno sacrificato a tale preoccupazione la regolarità di andamento della curva interpolatrice, imprimendole cambiamenti di direzione piuttosto bruschi e irregolari.

La moda delle curve interpolatrici è quasi sempre nel centro dell'elemento più alto dell'istogramma. L'ordinata massima è generalmente poco più elevata dell'altezza di tale elemento.

È raro, poi, trovare una discreta somiglianza confrontando l'andamento delle curve originarie e quello delle curve interpolatrici in corrispondenza al tratto iniziale e a quello finale, perchè i disegnatori hanno compreso solo raramente il modo di tendere all'asse x di ciascun tipo di curva.

In quei tratti che fanno parte di rami decrescenti o crescenti in modo uniforme per ampi intervalli non si riscontra alcun difetto caratteristico.

b) *Come varia l'esattezza della curva interpolatrice al variare del tipo di curva originaria.*

È conseguenza di quanto è stato sopra rilevato il fatto che soltanto quando si presenta al disegnatore un istogramma simmetrico si ottiene una curva interpolatrice simmetrica. In questo caso si ottengono, in generale, buoni risultati, perchè le curve simmetriche prese in considerazione, tipo II e VII, hanno un andamento abbastanza regolare e quindi facilmente individuabile.

Il disegnatore comprende difficilmente l'andamento delle curve a forma molto slanciata (es. curve del tipo IV₁), e in generale tutti i bruschi cambiamenti di direzione, e perciò in questi casi non si hanno delle buone interpolazioni. Il contrario avviene quando l'istogramma ha una forma molto regolare, cioè quando non ci sono grandi sbalzi fra le altezze delle colonne successive. Per es. se la curva è sempre crescente o decrescente, come nel caso della curva dei redditi del Pareto. I risultati dell'interpolazione sono abbastanza buoni, anche se l'ampiezza di ogni elemento dell'istogramma è grande, fatta eccezione del caso in cui il disegnatore non comprende, nel primo intervallo, l'andamento della curva e le dà una forma unimodale.

c) *Come varia la bontà dell'interpolazione al variare dell'ampiezza degli elementi dell'istogramma, e della divisione dell'intervallo totale in intervalli parziali.*

In generale, ciascuno degli istogrammi interpolati aveva tutte le colonne di eguale ampiezza, e quanto maggiore era tale ampiezza tanto più vago si è presentato al disegnatore l'andamento della curva, specie per i tipi unimodali e molto asimmetrici.

È da rilevare particolarmente che, quando la base di ogni elemento è grande, minore è l'altezza della colonna più alta, e di conseguenza l'ordinata del punto di culminazione della curva interpolatrice è notevolmente più bassa di quella della corrispondente curva fondamentale, mentre ne è aumentata l'ampiezza del tratto lungo il quale la curva risulta concava verso l'asse delle x .

Risulta quindi palese, che si otterrebbero risultati certamente migliori se la divisione dell'intervallo totale in intervalli parziali fosse fatto in modo da ridurre alquanto l'ampiezza di ogni colonna in prossimità dei tratti in cui l'andamento delle curve subisce rapidi cambiamenti.

d) *Influenza della conoscenza da parte dei disegnatori delle curve di uso frequente nella tecnica statistica, e, in genere, delle questioni statistiche.*

Si è detto che il disegnatore si vale essenzialmente, ma *non esclusivamente*, del suo colpo d'occhio. Ciò è naturale, perchè l'istogramma da interpolare non è il paesaggio da ritrarre; per quest'ultimo il colpo d'occhio orienta la soggettività del disegnatore in modo *ben determinato* verso una figura dalla quale devono risaltare i suoi sentimenti di fronte alla bellezza e all'armonia di ciò che egli ritrae, mentre nel primo caso il disegnatore, pur leggendo nell'istogramma l'andamento del fenomeno, non può individuare in modo unico la curva da tracciare, e perciò deve servirsi delle sue cognizioni e della sua esperienza di curve statistiche nel preferire di tracciare la curva in un modo piuttosto che in un altro. Si è potuto, difatti, constatare, guardando specialmente le interpolazioni di istogrammi identici eseguite da disegnatori diversi, che le interpolazioni con meno difetti sono state eseguite, in generale, dai disegnatori più provetti e più pratici di curve statistiche, e si è anche riscontrato che i disegnatori miglioravano con la pratica le loro interpolazioni.

e) *Se ciascun operatore abbia tendenze caratteristiche nell'eseguire le interpolazioni grafiche degli istogrammi.*

La risposta a questa questione è molto vaga perchè troppo esiguo, per questo riguardo, è stato il numero degli istogrammi interpolati da ciascun disegnatore.

S'è potuto constatare che le curve tracciate dal disegnatore *A* sono abbastanza regolari, hanno un andamento il più possibile uniforme, cioè una pendenza che non subisce rapidi cambiamenti; perciò si nota, in particolare, che il loro inizio ha quasi sempre la forma di un arco, generalmente tangente all'asse delle x , e che le ordinate della curva, per conseguenza, incominciano col valore zero e vanno aumentando dapprima lentamente e poi sempre più rapidamente.

Il disegnatore *B* è incorso invece spesso nel tracciamento di curve con andamento poco uniforme e a volte ondulato, a seconda della interpretazione che gli suggeriva la vista dell'istogramma.

Nel disegnatore *C* si rivela questa particolarità: nel ramo ascendente o discendente delle curve da lui tracciate, la maggior parte delle volte (*) che l'istogramma ha un elemento con altezza notevolmente differente da quella degli elementi immediatamente contigui, egli riceve una forte impressione da detto elemento, e la riproduce con un rigonfiamento della curva in corrispondenza a questo elemento.

Due delle quattro interpolazioni eseguite dal disegnatore *D* presentano curve con ordinata diversa da zero all'inizio, contrariamente a quanto accade per la rispettiva curva fondamentale.

Oltre a ciò nulla si può dire abbiano di caratteristico le curve tracciate dai vari operatori, qualunque sia il tipo, perchè non si può dire se esse si discostino quasi sempre egualmente dalla curva fondamentale, come non si può vedere se il grado di adesione vari al variare del tipo di curva, in relazione a qualche spiccata tendenza del disegnatore.

Il prospetto seguente riporta alcuni indici sintetici della bontà delle interpolazioni eseguite da ciascuno dei disegnatori *A*, *B*, *C* e *D*.

Possiamo da esso vedere, nel complesso e quantitativamente, l'adesione alla fondamentale delle curve tracciate dai singoli disegnatori. Non è possibile un confronto (quantitativo) tra essi, circa i risultati raggiunti, perchè le interpolazioni eseguite da l'uno non hanno, in genere, lo stesso grado di difficoltà di quelle eseguite da l'altro; questo confronto è stato però fatto, come si ricorda, tipo per tipo.

A riguardo del disegnatore *A*, soltanto l'interpolazione dell'istogramma 12 non è punto soddisfacente, per le note difficoltà inerenti al tipo IV₁, specialmente quando è ampia la base degli elementi dell'istogramma.

(*) Vedasi gli istogrammi 9 e 17.

*Indici sintetici della bontà delle interpolazioni eseguite da ciascuno
dei disegnatori A, B, C e D.*

| Tipo di curva | N° dello isto- gramma | Ampiezza della base di ogni elemento | | Indice D_r per l'intervallo totale | Indice I_r' per l'intervallo totale | Massimo valore assunto negli intervalli parziali, esclusi quegli estremi (*), dagli indici | | | |
|---------------------|--------------------------------|--|--------|---|--|---|-----|--------|----------|
| | | in unità | in cm. | | | D_r | S | I_r' | χ^2 |

Disegnatore A

| | | | | | | | | | |
|-----------------|----|-----|-----|-------|-------|-------|--------|--------|----------|
| I | 1 | 1 | 2,5 | 0,046 | 0,196 | 0,040 | -0,890 | 1,278 | 159,01 |
| II | 5 | 3 | 7,5 | 0,079 | 0,442 | 0,087 | -0,711 | 2,477 | 142,00 |
| III | 8 | 2 | 5 | 0,042 | 0,161 | 0,035 | -0,666 | 0,976 | 146,46 |
| IV ₁ | 12 | 2 | 5 | 0,667 | 2,952 | 0,720 | -0,843 | 20,642 | 6.739,65 |
| IV ₂ | 14 | 1 | 5 | 0,073 | 0,267 | 0,135 | -0,790 | 4,152 | 97,32 |
| V | 18 | 1 | 2 | 0,006 | 0,023 | 0,053 | -0,268 | 1,455 | 6,44 |
| » | 20 | 2 | 4 | 0,026 | 0,051 | 0,084 | -0,593 | 1,965 | 205,42 |
| VI | 21 | 1 | 2 | 0,019 | 0,054 | 0,055 | -0,926 | 1,463 | 19,48 |
| R | 28 | 2/5 | 10 | 0,070 | 0,318 | 0,020 | +0,069 | 0,641 | 570,77 |
| L | 29 | 5 | 4 | 0,030 | 0,067 | 0,047 | +0,974 | 1,440 | 14,24 |

Disegnatore B

| | | | | | | | | | |
|-----------------|----|-----|-----|-------|-------|-------|--------|-------|--------|
| II | 3 | 1 | 2,5 | 0,008 | 0,029 | 0,057 | -0,252 | 1,435 | 1,31 |
| » | 4 | 2 | 5 | 0,029 | 0,141 | 0,126 | +0,193 | 2,510 | 18,52 |
| III | 6 | 1 | 2,5 | 0,045 | 0,134 | 0,154 | -0,823 | 4,568 | 345,90 |
| IV ₁ | 10 | 1 | 2,5 | 0,320 | 0,695 | 0,378 | -0,658 | 9,007 | 937,09 |
| IV ₂ | 15 | 1 | 5 | 0,063 | 0,177 | 0,104 | -0,249 | 2,868 | 64,37 |
| VII | 24 | 2 | 4 | 0,005 | 0,023 | 0,026 | +0,424 | 0,728 | 0,64 |
| R | 27 | 1/5 | 5 | 0,006 | 0,029 | 0,008 | -0,152 | 0,221 | 0,59 |

Disegnatore C

| | | | | | | | | | |
|-----------------|----|---|-----|-------|-------|-------|--------|--------|----------|
| III | 9 | 2 | 5 | 0,063 | 0,239 | 0,105 | +0,490 | 3,206 | 1.052,25 |
| IV ₁ | 11 | 1 | 2,5 | 0,324 | 0,787 | 0,364 | -0,825 | 10,939 | 1.307,10 |
| IV ₂ | 17 | 2 | 10 | 0,355 | 1,377 | 0,499 | -0,532 | 12,966 | 1.289,43 |
| V | 19 | 2 | 4 | 0,017 | 0,053 | 0,071 | -0,331 | 1,693 | 76,04 |
| VII | 26 | 3 | 6 | 0,014 | 0,066 | 0,040 | -0,167 | 1,148 | 3,39 |

Disegnatore D

| | | | | | | | | | |
|-----|----|---|-----|-------|-------|-------|--------|-------|-----------|
| I | 2 | 2 | 5 | 0,116 | 0,614 | 0,091 | -0,794 | 2,930 | 3.796,26 |
| III | 7 | 1 | 2,5 | 0,060 | 0,154 | 0,191 | -0,888 | 5,598 | 14.257,08 |
| VI | 23 | 2 | 4 | 0,033 | 0,085 | 0,094 | -0,678 | 3,226 | 98,05 |
| VII | 25 | 3 | 6 | 0,016 | 0,064 | 0,037 | -0,257 | 1,096 | 3,66 |

(*) Si fa eccezione per l'indice χ^2

I massimi valori assunti da S sono, generalmente, negativi, e si riferiscono quasi sempre all'intervallo su cui poggia l'elemento più alto dell'istogramma, perchè le curve interpolatrici disegnate da A sono sempre meno slanciate delle rispettive fondamentali.

Se escludiamo la curva 12, rileviamo che I' , e χ^2 hanno valori massimi in media non molto elevati, perchè, come abbiamo altre volte detto, non riscontriamo irregolarità di andamento nelle curve tracciate da A .

Meglio poteva fare il disegnatore B , data la piccola ampiezza della base degli elementi di istogrammi da lui interpolati. I massimi valori assunti da D , e I' , sono, in media, più elevati di quelli relativi alle curve del disegnatore A , a causa delle irregolarità riscontrate alcune volte nelle curve interpolate da B .

Ancora meno buoni sono i risultati raggiunti dai disegnatori C e D . Tutti gli indici relativi a quest'ultime interpolazioni sono più elevati, in media, dei precedenti, e in particolare χ^2 assume valori anche notevolmente grandi, perchè le rispettive curve interpolatrici contengono tratti con andamento molto diverso da quello degli originali.

f) *Quali accortezze bisogna usare per costruire un istogramma facilmente e soddisfacentemente interpolabile, oppure, se questo non si potesse costruire in altro modo, quali elementi bisognerebbe conoscere, oltre l'istogramma, per avere una curva interpolatrice che meglio risponda all'andamento reale del fenomeno.*

I due elementi che determinano la curva interpolatrice sono l'istogramma e il disegnatore, e perciò occorre accuratezza nello scegliere, se ciò è possibile, l'uno e l'altro.

Supponiamo dapprima che dipenda da noi la costruzione dell'istogramma, cioè in particolare la determinazione della divisione dell'intervallo totale in intervalli parziali, e vediamo quali criteri si debbono tenere presenti per trovarsi nelle condizioni più favorevoli per una buona interpolazione, senza rendere eccessivo il numero degli elementi dell'istogramma per ciascuno dei quali è richiesto, evidentemente, un certo lavoro.

Se il fenomeno è simmetrico bisogna costruire un istogramma simmetrico; gli intervalli parziali possono essere allora tutti uguali e alquanto ampi.

Se si hanno validi elementi per determinare, sia pure approssimativamente, il valore della moda, bisogna avere l'accortezza di farla cadere nel centro di un intervallo parziale.

Quando si prevede che, in un certo intervallo, il tratto della curva sarà poco uniforme, è consigliabile, come già si è osservato in *c*), rendere piccola l'ampiezza delle colonne dell'istogramma in questo intervallo, mentre può essere presa grande l'ampiezza delle colonne corrispondenti ad intervalli nei quali si prevede un andamento molto uniforme della curva.

Si può mettere bene in vista se la curva, nei tratti estremi, ha un andamento tangente alla base, oppure la raggiunge con una certa inclinazione, o non la raggiunge affatto fermandosi ad un valore diverso da zero dell'ordinata, quando gli intervalli parziali sono abbastanza piccoli in prossimità degli estremi.

In quanto al disegnatore è sempre necessario che egli abbia qualche conoscenza di curve statistiche, e intenda lo scopo di una interpolazione, per evitare che tracci delle curve inverosimili.

Più importante è la scelta del disegnatore quando manca la possibilità di costruire l'istogramma in modo confacente all'andamento prevedibile del fenomeno. Questo caso è il più comune perchè le altezze delle colonne degli istogrammi sono generalmente determinate dalle medie delle frequenze di un fenomeno, prese ad intervalli eguali della variabile da cui dipende, oppure rappresentano l'ammontare delle diverse classi in cui si è divisa la rilevazione di un fenomeno. Il disegnatore deve avere dunque molta pratica in questo genere di lavoro e possedere cognizioni adeguate dei fenomeni statistici per riuscire bene nell'interpolazione di istogrammi comunque costruiti.

Ciò non è però ancora sufficiente per ottenere buoni risultati: occorre anche che il disegnatore abbia altri elementi a disposizione. La nostra ricerca ha rilevato che nel caso delle curve unimodali, particolarmente importante è la conoscenza della moda e della ordinata massima per ottenere una buona interpolazione del tratto culminante della curva, specialmente se l'ampiezza dell'intervallo sul quale si trova l'elemento più alto dell'istogramma è grande, perchè allora l'altezza di questo elemento è molto inferiore all'ordinata massima della curva teorica. È inoltre utilissimo conoscere, grosso modo, la variabilità del fenomeno in vicinanza degli estremi dell'intervallo totale di rilevazione per avere ivi l'andamento più esatto possibile.

Per ottenere una buona interpolazione ed eliminare, in parte, la soggettività dell'operatore, è talvolta usato un metodo consistente nel sovrapporre le curve interpolate da diversi operatori e relative a istogrammi identici o diversi, ma sempre corrispondenti ad uno stesso fenomeno, e nel tracciare poi, una curva che segna l'andamento

medio delle precedenti, e sia esente da quelle deformazioni evidenti non presentate dalla maggior parte delle curve interpolatrici.

La ricerca da noi eseguita mette in evidenza lo scarso affidamento che si può fare su tale metodo. Difatti abbiamo notato che sono comuni a tutte le curve interpolatrici, i difetti di avere la moda nel centro dell'intervallo sul quale poggia l'elemento più alto dell'istogramma, di avere, quasi sempre, l'ordinata massima notevolmente inferiore all'ordinata del punto di culminazione della fondamentale, ed infine, di avere generalmente, negli estremi, difformità abbastanza grandi dalle curve fondamentali.

Perciò, almeno a nostro parere, si potrebbe usare della sovrapposizione, per eliminare i difetti accidentali dovuti alla soggettività dell'operatore, solo quando si fosse già nelle condizioni più favorevoli per una buona interpolazione.

APPENDICE

ESEMPIO.

Esponiamo in appendice una tabella contenente tutti gli elementi, relativi ad una delle 31 interpolazioni, necessari per determinare l'area relativa D_r compresa tra la curva fondamentale e la curva interpolata, lo scostamento relativo S dell'area differenziale, l'indice relativo di dissomiglianza I_r' e l'indice χ^2 del Pearson.

La tabella scelta è stata quella relativa alla curva 14, interpolatrice dell'istogramma dedotto dall'equazione (IV_2^*) e avente gli elementi di cm. 5 di ampiezza.

La ragione di questa scelta dipende dal fatto che gli istogrammi costruiti per il tipo IV sono più numerosi di quelli costruiti per gli altri tipi. Inoltre la curva di equazione (IV_2^*) ha la particolarità di avere il ramo ascendente uniformemente crescente in un ampio intervallo, e la nostra ricerca ha riscontrato in simili casi che l'interpolazione riesce generalmente buona; le piccole differenze nei valori corrispondenti delle ordinate dipendono da imperfezioni del tracciato delle curve e dalla difficoltà di individuare in modo preciso il valore delle ordinate (*). Dette differenze poi si attenuano confrontando le medie delle coppie successive di ordinate, e successivamente correg-

(*) Dobbiamo contentarci dell'approssimazione inferiore a $1/2$.

gendo le medie in modo da soddisfare la condizione imposta, cioè che tanto per la fondamentale che per la curva interpolata siano uguali le somme delle medie comprese negli intervalli parziali (*).

Il ramo decrescente della suddetta curva invece non ha uniformità di andamento, e presenta cambiamenti di pendenza, anche accennuati, e per questi rami l'interpolazione non riesce, in generale, buona.

In ogni intervallo parziale (x_{i-1}, x_i) , abbiamo contrassegnato con un puntino quei valori medi che sono più grandi dell'altezza dell'elemento di istogramma relativo a quell'intervallo; ciò serve per rendere più rapido il calcolo di Ω come è indicato dalla formula (3) del paragr. 10.

(*) Nella seconda nota del paragr. 9 si disse quale criterio si segue per la correzione delle medie. Aggiungiamo che la proporzionalità a cui si accennò allora si determina per stima; in considerazione dell'ordine di approssimazione delle ordinate, i termini di correzione variano generalmente di mezza unità, salvo i casi in cui o i valori delle medie siano di poche unità, o per raggiungere la predetta eguaglianza occorra una correzione diversa da 0,5.

Questo procedere per stima non pregiudica i valori degli indici, e d'altra parte è comodo per eseguire rapidamente la correzione in questione.

TAVOLA XXI. — Elementi necessari per il calcolo degli indici di confronto D , S , I , e x^2 relativi alla curva interpolatrice dell'istogramma I_4 .

| Ascisse | Letture curva F_{IV_2} | Medie curva F_{IV_2} | Medie curva F_{IV_2} corrette a_i | Letture curva I_4 | Medie curva I_4 | Medie curva I_4 corrette per in- tervalli b_i | Medie curva I_4 corrette global- mente b'_i | Diffe- renze $a_i - b_i$ | Diffe- renze $a_i - b'_i$ | $\frac{(a_i - b_i)^2}{a_i}$ |
|---------|--------------------------------|------------------------------|---|---------------------------|-------------------------|--|--|--------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| -10.0 | 3,6 | | | 2, | | | | | | |
| - 9.9 | 3,8 | 3,7 | 3,7 | 2, | 2, | 2,7 | 2, | 1, | 1,7 | 0,27 |
| .8 | 4, | 3,9 | 3,8 | 3, | 2,5 | 3,2 | 2,5 | 0,6 | 1,3 | — |
| .7 | 4, | 4, | 3,9 | 3, | 3, | 3,7 | 3, | 0,2 | 0,9 | — |
| .6 | 4, | 4, | 4, | 4, | 3,5 | 4,2 | 3,5 | -0,2 | 0,5 | — |
| .5 | 4,2 | 4,1 | 4,1 | 4, | 4, | 4,7 | 4, | -0,6 | 0,1 | 0,09 |
| .4 | 4,5 | 4,3 | 4,2 | 4, | 4, | 4,7 | 4, | -0,5 | 0,2 | — |
| .3 | 4,5 | 4,5 | 4,4 | 4, | 4, | 4,7 | 4, | -0,3 | 0,4 | — |
| .2 | 4,7 | 4,6 | 4,6 | 4, | 4, | 4,7 | 4, | -0,1 | 0,6 | — |
| .1 | 5, | 4,8 | 4,7 | 4, | 4, | 4,7 | 4, | 0, | 0,7 | 0 |
| | | 5, | 4,9 | | 4,5 | 5,0 | 4,5 | -0,1 | 0,4 | — |
| | | 43,9 | 42,3 | | 35,5 | 42,3 | | 3,6 | | |
| - 9.0 | 5, | | | 5, | | | | | | |
| - 8.9 | 5, | 5, | 5, | 5, | 5, | 5, | 5, | 0, | 0, | — |
| .8 | 5,5 | 5,2 | 5, | 5, | 5, | 5, | 5, | 0, | 0, | — |
| .7 | 5,5 | 5,5 | 5,5 | 5, | 5, | 5,5 | 5, | 0, | 0,5 | 0 |
| .6 | 5,5 | 5,5 | 5,5 | 5, | 5, | 5,5 | 5, | 0, | 0,5 | — |
| .5 | 6, | 5,7 | 5,5 | 6, | 5,5 | 5,5 | 5,5 | 0, | 0, | — |
| .4 | 6, | 6, | 6, | 6, | 6, | 6, | 6, | 0, | 0, | — |
| .3 | 6,5 | 6,2 | 6, | 6, | 6, | 6, | 6, | 0, | 0, | 0 |
| .2 | 6,5 | 6,5 | 6,5 | 6, | 6, | 6,3 | 6, | 0,2 | 0,5 | — |
| .1 | 6,5 | 6,5 | 6,5 | 7, | 6,5 | 6,5 | 6,5 | 0, | 0, | — |
| | | 6,8 | 6,8 | | 7, | 7, | 7, | -0,2 | -0,2 | — |
| | | 58,9 | 58,3 | | 57, | 58,3 | | 0,4 | | |
| - 8.0 | 7, | | | 7, | | | | | | |
| - 7.9 | 7, | 7, | 7, | 7, | 7, | 7, | 7, | 0, | 0, | 0 |
| .8 | 7, | 7, | 7, | 7, | 7, | 7, | 7, | 0, | 0, | — |
| .7 | 8, | 7,5 | 7,5 | 7, | 7, | 7,5 | 7, | 0, | 0,5 | — |
| .6 | 8, | 8, | 8, | 8, | 7,5 | 7,5 | 7,5 | 0,5 | 0,5 | — |
| .5 | 8,5 | 8,2 | 8, | 8, | 8, | 8, | 8, | 0, | 0, | 0 |
| .4 | 8,5 | 8,5 | 8,5 | 8, | 8, | 8,5 | 8, | 0, | 0,5 | — |
| .3 | 9, | 8,7 | 8,7 | 9, | 8,5 | 8,7 | 8,5 | 0, | 0,2 | — |
| .2 | 9, | 9, | 9, | 9, | 9, | 9, | 9, | 0, | 0, | — |
| .1 | 10, | 9,5 | 9,5 | 10, | 9,5 | 10, | 10, | -0,5 | -0,5 | 0,03 |
| | | 10, | 10, | | 10, | 10, | 10, | 0, | 0, | — |
| | | 83,4 | 83,2 | | 81,5 | 83,2 | | 1,0 | | |

Segue TAVOLA XXI.

| Ascisse | Letture curva F_{IV_2} | Medie curva F_{IV_2} | Medie curva F_{IV_2} corrette a_i | Letture curva I_4 | Medie curva I_4 | Medie curva I_4 corrette per in- tervalli b_i | Medie curva I_4 corrette global- mente b'_i | Diffe- renze $a_i - b_i$ | Diffe- renze $a_i - b'_i$ | $(a_i - b_i)^2$ a_i |
|---------|--------------------------------|------------------------------|---|---------------------------|-------------------------|--|--|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------|
| -7.0 | 10, | | | 10, | | | | | | |
| -6.9 | 11, | 10,5 | 10, | 10, | 10, | 10, | 10, | 0, | 0, | — |
| .8 | 11, | 11, | 10,5 | 11, | 10,5 | 10,5 | 10,5 | 0, | 0, | — |
| .7 | 12, | 11,5 | 11, | 11, | 11, | 11, | 11, | 0, | 0, | 0, |
| .6 | 12, | 12, | 11,5 | 12, | 11,5 | 11,5 | 11,5 | 0, | 0, | — |
| .5 | 13, | 12,5 | 12,2 | 12, | 12, | 12,2 | 12, | 0, | 0,2 | — |
| .4 | 13, | 13, | 12,7 | 13, | 12,5 | 12,7 | 12,5 | 0, | 0,2 | — |
| .3 | 14, | 13,5 | 13,3 | 13, | 13, | 13,3 | 13, | 0, | 0,3 | 0, |
| .2 | 14, | 14, | 13,8 | 14, | 13,5 | 13,8 | 13,5 | 0, | 0,3 | — |
| .1 | 15, | 14,5 | 14,5 | 14, | 14, | 14,5 | 14, | 0, | 0,5 | — |
| | | 15, | 15, | | 14,5 | 15, | 14,5 | 0, | 0,5 | — |
| | | 127,5 | 124,5 | | 122,5 | 124,5 | | 0, | | |
| -6.0 | 15, | | | 15, | | | | | | |
| -5.9 | 16, | 15,5 | 15,5 | 16, | 15,5 | 15,5 | 15,5 | 0, | 0, | 0, |
| .8 | 16, | 16, | 16,3 | 17, | 16,5 | 16,3 | 16,5 | 0, | -0,2 | — |
| .7 | 17, | 16,5 | 17,2 | 18, | 17,5 | 17,2 | 17,5 | 0, | -0,3 | — |
| .6 | 18, | 17,5 | 18, | 19, | 18,5 | 18, | 18,5 | 0, | -0,5 | — |
| .5 | 19, | 18,5 | 19, | 20, | 19,5 | 19, | 19,5 | 0, | -0,5 | 0, |
| .4 | 20, | 19,5 | 20, | 21, | 20,5 | 20, | 20,5 | 0, | -0,5 | — |
| .3 | 21, | 20,5 | 21, | 22, | 21,5 | 21, | 21,5 | 0, | -0,5 | — |
| .2 | 22, | 21,5 | 22,5 | 23, | 22,5 | 22,5 | 22,5 | 0, | 0, | — |
| .1 | 23, | 22,5 | 23,5 | 24, | 23,5 | 23,5 | 23,5 | 0, | 0, | 0, |
| | | 24, | 25, | | 25, | 25, | 25, | 0, | 0, | — |
| | | 192, | 198, | | 200,5 | 198, | | 0, | | |
| -5.0 | 25, | | | 26, | | | | | | |
| -4.9 | 26, | 25,5 | 26, | 27, | 26,5 | 26, | 26,5 | 0, | -0,5 | — |
| .8 | 28, | 27, | 27,5 | 29, | 28, | 27,5 | 28,2 | 0, | -0,7 | — |
| .7 | 30, | 29, | 29, | 31, | 30, | 29,5 | 30,2 | -0,5 | -1,2 | 0,01 |
| .6 | 32, | 31, | 30,5 | 33, | 32, | 31,5 | 32,2 | -1,0 | -1,7 | — |
| .5 | 34, | 33, | 32,5 | 34, | 33,5 | 33, | 33,7 | -0,5 | -1,2 | — |
| .4 | 36, | 35, | 34,5 | 36, | 35, | 34,5 | 35,2 | 0, | -0,7 | — |
| .3 | 38, | 37, | 36,5 | 38, | 37, | 36,5 | 37,2 | 0, | -0,7 | 0, |
| .2 | 40, | 39, | 39, | 40, | 39, | 38,5 | 39,2 | 0,5 | -0,2 | — |
| .1 | 43, | 41,5 | 41,5 | 43, | 41,5 | 41, | 41,7 | 0,5 | -0,2 | — |
| | | 44,5 | 44,5 | | 44, | 43,5 | 44,4 | 1,0 | 0,1 | — |
| | | 342,5 | 341,5 | | 346,5 | 341,5 | | 4,0 | | |

Segue TAVOLA XXI.

| Ascisse | Lettura curva F_{IV_2} | Medie curva F_{IV_2} | Medie curva F_{IV_2} corrette a_i | Lettura curva I_4 | Medie curva I_4 | Medie curva I_4 corrette per in- tervalli b_i | Medie curva I_4 corrette global- mente b'_i | Diffe- renze $a_i - b_i$ | Diffe- renze $a_i - b'_i$ | $(a_i - b_i)^2$ a_i |
|---------|--------------------------------|------------------------------|---|---------------------------|-------------------------|--|--|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------|
| -4.0 | 46, | | | 45, | | | | | | |
| -3.9 | 48, | 47, | 47,5 | 48, | 46,5 | 47, | 47, | 0,5 | 0,5 | 0,01 |
| .8 | 51, | 49,5 | 50, | 52, | 50, | 50, | 50,3 | 0, | -0,3 | — |
| .7 | 54, | 52,5 | 53, | 55, | 53,5 | 53,5 | 53,8 | -0,5 | -0,8 | — |
| .6 | 59, | 56,5 | 56,5 | 59, | 57, | 57, | 57,3 | -0,5 | -0,8 | — |
| .5 | 64, | 61,5 | 61,5 | 64, | 61,5 | 61,5 | 61,9 | 0, | -0,3 | 0, |
| .4 | 69, | 66,5 | 66,6 | 69, | 66,5 | 66,6 | 66,8 | 0 | -0,2 | — |
| .3 | 74, | 71,5 | 72, | 75, | 72, | 72,5 | 72,3 | -0,5 | -0,3 | — |
| .2 | 80, | 77, | 77,5 | 81, | 78, | 78, | 78,3 | -0,5 | -0,8 | — |
| .1 | 87, | 83,5 | 83,5 | 86, | 83,5 | 83,5 | 83,8 | 0, | -0,3 | 0, |
| | | 90,5 | 91, | | 89, | 89,5 | 89,5 | 1,5 | 1,5 | — |
| | | 656, | 659,1 | | 657,5 | 659,1 | | 4,0 | | |
| -3.0 | 94, | | | 92, | | | | | | |
| -2.9 | 102, | 98, | 98, | 102, | 97, | 97,8 | 97,5 | 0,2 | 0,5 | — |
| .8 | 110, | 106, | 105,6 | 110, | 106, | 107, | 107, | -1,4 | -1,4 | — |
| .7 | 120, | 115, | 114, | 120, | 115, | 116,2 | 116, | -2,2 | -2, | 0,04 |
| .6 | 130, | 125, | 124, | 131, | 125,5 | 127,1 | 127, | -3,1 | -3, | — |
| .5 | 142, | 136, | 135, | 142, | 136,5 | 138,5 | 138, | -3,5 | -3, | — |
| .4 | 156, | 149, | 149, | 154, | 148, | 150,2 | 150, | -1,2 | -1, | — |
| .3 | 170, | 163, | 163, | 168, | 161, | 163,5 | 163, | -0,5 | 0, | 0, |
| .2 | 189, | 179,5 | 179,5 | 183, | 175,5 | 178,2 | 178, | 1,3 | 1,5 | — |
| .1 | 209, | 199, | 199, | 200, | 191,5 | 194,5 | 194, | 4,5 | 5, | — |
| | | 219,5 | 219,5 | | 210, | 213,6 | 213, | 5,9 | 6,5 | — |
| | | 1490, | 1486,6 | | 1466, | 1486,6 | | 23,8 | | |
| -2.0 | 230, | | | 220, | | | | | | |
| -1.9 | 254, | 242, | 244, | 242, | 231, | 235, | 235, | 9, | 9, | 0,33 |
| .8 | 280, | 267, | 269, | 266, | 254, | 258,5 | 258, | 10,5 | 11, | 0,41 |
| .7 | 309, | 294,5 | 296,5 | 288, | 277, | 281,5 | 281, | 15, | 15,5 | 0,76 |
| .6 | 323, | 316, | 318, | 314, | 301, | 306, | 305, | 12, | 13, | 0,45 |
| .5 | 384, | 353,5 | 356, | 350, | 332, | 337, | 336, | 19, | 20, | 1,01 |
| .4 | 436, | 410, | 412,5 | 392, | 371, | 376, | 375, | 36,5 | 37,5 | 3,23 |
| .3 | 485, | 460,5 | 463, | 444, | 418, | 423, | 422, | 40, | 41, | 3,46 |
| .2 | 535, | 510, | 512,5 | 524, | 484, | 489, | 488, | 23,5 | 24,5 | 1,08 |
| .1 | 596, | 565,5 | 568,3 | 670, | 597, | 602, | 601, | -33,7 | -32,7 | 2,00 |
| | | 627, | 630, | | 756,5 | 761,8 | 761, | -131,8 | -131, | 27,57 |
| | | 4046, | 4069,8 | | 4021,5 | 4069,8 | | 331,0 | | |

Segue TAVOLA XXI.

| Ascisse | Letture curva F_{IV_2} | Medie curva F_{IV_2} | Medie curva F_{IV_2} corrette a_i | Letture curva 14 | Medie curva 14 | Medie curva 14 corrette per in- tervalli b_i | Medie curva 14 corrette global- mente b'_i | Diffe- renze $a_i - b_i$ | Diffe- renze $a_i - b'_i$ | $(a_i - b_i)^2$ a_i |
|---------|--------------------------------|------------------------------|---|------------------------|----------------------|---|---|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------|
| -1.0 | 658, | | | 843, | | | | | | |
| -.9 | 758, | 708, | 698, | 877, | 860, | 860, | 863, | -162,0 | -165, | 37,60 |
| .8 | 802, | 780, | 762, | 897, | 887, | 887, | 889, | -125, | -127, | 20,51 |
| .7 | 880, | 841, | 815, | 907, | 902, | 902, | 903,4 | -87, | -88,4 | 9,29 |
| .6 | 946, | 913, | 891, | 911, | 909, | 909,5 | 910, | -18,5 | -19, | 0,38 |
| .5 | 984, | 965, | 953, | 911, | 911, | 911,5 | 912, | 41,5 | 41, | 1,81 |
| .4 | 997, | 990,5 | 984,6 | 909, | 910, | 910,6 | 911, | 74, | 73,6 | 5,56 |
| .3 | 999, | 998, | 996, | 905, | 907, | 907,5 | 908, | 88,5 | 88, | 7,86 |
| .2 | 988, | 993,5 | 988, | 893, | 899, | 899, | 900,5 | 89,0 | 87,5 | 8,02 |
| .1 | 940, | 964, | 954, | 871, | 882, | 882, | 884, | 72,0 | 70, | 5,43 |
| | | 894,5 | 880, | | 852,5 | 852,5 | 855,5 | 27,5 | 24,5 | 0,86 |
| | | 9047,5 | 8921,6 | | 8919,5 | 8921,6 | | 785,0 | | |
| 0.0 | 849, | | | 834, | | | | | | |
| 0.1 | 757, | 803, | 796, | 793, | 813,5 | 815, | 817,2 | -19, | -21,2 | 0,45 |
| .2 | 660, | 708,5 | 704, | 735, | 764, | 765,5 | 768, | -61,5 | -64, | 5,37 |
| .3 | 570, | 615, | 612, | 652, | 693,5 | 696, | 697,5 | -84, | -85,5 | 11,53 |
| .4 | 479, | 524,5 | 522, | 518, | 585, | 587,5 | 589, | -65,5 | -67, | 8,22 |
| .5 | 397, | 438, | 436, | 357, | 437,5 | 440,5 | 441,3 | -4,5 | -5,3 | 0,05 |
| .6 | 312, | 354,5 | 353, | 240, | 298,5 | 302,3 | 302,2 | 50,7 | 50,8 | 7,28 |
| .7 | 244, | 278, | 277, | 181, | 210,5 | 214,5 | 214, | 62,5 | 63,0 | 14,10 |
| .8 | 196, | 220, | 219, | 145, | 163, | 167,5 | 166, | 51,5 | 53,0 | 12,11 |
| .9 | 161, | 178,5 | 177,8 | 122, | 133,5 | 138, | 136,8 | 39,8 | 41, | 8,91 |
| | | 149, | 148, | | 114, | 118, | 116,2 | 30,0 | 31,8 | 6,08 |
| | | 4269, | 4244,8 | | 4213, | 4244,8 | | 469,0 | | |
| 1.0 | 137, | | | 106, | | | | | | |
| 1.1 | 115, | 126, | 124,6 | 94, | 100, | 102,1 | 102, | 22,5 | 22,6 | 4,06 |
| .2 | 95, | 105, | 103,6 | 83, | 88,5 | 90,3 | 90, | 13,3 | 13,6 | 1,71 |
| .3 | 80, | 87,5 | 86,1 | 74, | 78,5 | 80,2 | 80, | 5,9 | 6,1 | 0,40 |
| .4 | 67, | 73,5 | 72,1 | 66, | 70, | 71,6 | 71, | 0,5 | 1,1 | 0,00 |
| .5 | 56, | 61,5 | 60, | 58, | 62, | 63,5 | 63, | -3,5 | -3, | 0,20 |
| .6 | 47, | 51,5 | 50, | 52, | 55, | 56,4 | 56, | -6,4 | -6, | 0,82 |
| .7 | 39, | 43, | 41,7 | 45, | 48,5 | 49,8 | 49, | -8,1 | -7,3 | 1,57 |
| .8 | 33, | 36, | 34,7 | 39, | 42, | 43,2 | 42,5 | -8,5 | -7,8 | 2,08 |
| .9 | 28, | 30,5 | 29,2 | 34, | 36,5 | 37,6 | 37, | -8,4 | -7,8 | 2,42 |
| | | 26,5 | 25,2 | | 31,5 | 32,5 | 32, | -7,3 | -6,8 | 2,11 |
| | | 641, | 627,2 | | 612,5 | 627,2 | | 84,4 | | |

Segue TAVOLA XXI.

| Ascisse | Letture curva F_{IV_2} | Medie curva F_{IV_2} | Medie curva F_{IV_2} corrette a_i | Letture curva I_4 | Medie curva I_4 | Medie curva I_4 corrette per in- tervalli b_i | Medie curva I_4 corrette global- mente b'_i | Diffe- renze $a_i - b_i$ | Diffe- renze $a_i - b'_i$ | $(a_i - b_i)^2$ a_i |
|---------|--------------------------------|------------------------------|---|---------------------------|-------------------------|--|--|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------|
| 2.0 | 25, | | | 29, | | | | | | |
| 2.1 | 21, | 23, | 23, | 24, | 26,5 | 26, | 26,5 | -3, | -3,5 | 0,39 |
| .2 | 18, | 19,5 | 19,6 | 20, | 22, | 21,5 | 22, | -1,9 | -2,4 | — |
| .3 | 16, | 17, | 17, | 17, | 18,5 | 18,1 | 18,5 | -1,1 | -1,5 | 0,07 |
| .4 | 14, | 15, | 15, | 15, | 16, | 15,6 | 16, | -0,6 | -1, | — |
| .5 | 13, | 13,5 | 13,8 | 13, | 14, | 13,7 | 14, | 0,1 | -0,2 | 0,00 |
| .6 | 12, | 12,5 | 12,8 | 11, | 12, | 11,7 | 12, | 1,1 | 0,8 | — |
| .7 | 11, | 11,5 | 11,8 | 10, | 10,5 | 10,2 | 10,5 | 1,6 | 1,3 | 0,22 |
| .8 | 10, | 10,5 | 10,8 | 9, | 9,5 | 9,3 | 9,5 | 1,5 | 1,3 | — |
| .9 | 9, | 9,5 | 9,8 | 8, | 8,5 | 8,3 | 8,5 | 1,5 | 1,3 | 0,23 |
| | | 8,5 | 8,8 | | 8, | 8, | 8, | 0,8 | 0,8 | — |
| | | 140,5 | 142,4 | | 145,5 | 142,4 | | 13,2 | | |
| 3.0 | 8, | | | 8, | | | | | | |
| 3.1 | 7, | 7,5 | 7,8 | 7, | 7,5 | 8, | 7,5 | -0,2 | 0,3 | 0,01 |
| .2 | 6, | 6,5 | 7, | 7, | 7, | 7,6 | 7, | -0,6 | 0, | — |
| .3 | 6, | 6, | 6,3 | 6, | 6,5 | 7,1 | 6,5 | -0,8 | -0,2 | 0,10 |
| .4 | 5, | 5,5 | 5,6 | 6, | 6, | 6,6 | 6, | -1, | -0,4 | — |
| .5 | 4, | 4,5 | 5, | 5, | 5,5 | 6,1 | 5,5 | -1,1 | -0,5 | 0,24 |
| .6 | 4, | 4, | 4,5 | 4, | 4,5 | 5,1 | 4,5 | -0,6 | 0, | — |
| .7 | 4, | 4, | 4, | 3, | 3,5 | 4,1 | 3,5 | -0,1 | 0,5 | 0,00 |
| .8 | 4, | 4, | 4, | 2, | 2,5 | 3,1 | 2,5 | 0,9 | 1,5 | — |
| .9 | 3, | 3,5 | 3,5 | 1, | 1,5 | 2, | 1,5 | 1,5 | 2, | 0,64 |
| | | 3, | 3, | | ,5 | 1, | 0,5 | 2, | 2,5 | — |
| | | 48,5 | 50,7 | | 45, | 50,7 | | 8,8 | | |
| 4.0 | 3, | | | 0 | | | | | | |

| | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| Pubblicazioni ricevute. | Publications reçues. |
| Publications received. | Erhaltene Veröffentlichungen. |

Periodici — Périodiques.

Periodicals — Zeitschriften.

- Agricoltura Razionale (L').** — Anno 1932, completo.
- Alcuni indici della situazione Economica Italiana e del Lazio.** — Anno 1932, completo.
- Amministrazione Locale (L').** — Anno 1932, completo.
- Annali del Fascismo.** — Anno 1932, completo.
- Annali di Economia** (Università Commerciale Bocconi). Anno 1932, completo.
- Assicurazioni Sociali (Le).** — Anno 1932, completo.
- Assistenza Sociale nell'Industria (L').** — Anno 1932, completo.
- Atti della R. Accademia dei Georgofili.** — Anno 1932, completo.
- Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.** — Anno 1932-33. Tomo XCII, Disp. 1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, 6^a, 7^a, 8^a, 9^a, 10^a.
- Bollettino del Consiglio Provinciale dell'Economia Corporativa di Brescia.** — Anno 1932, completo.
- Bollettino del Consiglio Provinciale dell'Economia Corporativa di Udine.** — Anno 1932, completo.
- Bollettino della Federazione Nazionale Fascista delle Imprese Assicuratrici.** — Anno 1932, completo.
- Bollettino delle Malattie Infettive del Regno** (Ministero dell'Interno). Anno 1932, completo.
- Bollettino Mensile della Società delle Nazioni.** — Anno 1932, completo.
- Bollettino Mensile delle Compagnie di Navigazione.** Anno 1932, completo.
- Bollettino di Notizie Economiche.** — Anno 1932, completo.
- Bollettino Sanitario del Bestiame** (Ministero dell'Interno). — Anno 1932, completo.
- Bollettino Semestrale di Statistica e Legislazione Comparata.** (Ministero delle Finanze). Anno 1932, completo.
- Bollettino Statistico Mensile per la Provincia di Milano.** — Anno 1932, completo.
- Bollettino Statistico del Ministero dei LL. PP.** — Anno 1932, completo.
- Bollettino Ufficiale Legislazione e Disposizioni Ufficiali** (Ministero delle Finanze). Anno 1932, completo.
- Bollettino Ufficiale del Ministero delle Finanze.** Anno 1932, Vol. LXXII, n. 1-11, 12-26, 28-37, 39-42, 43, 44-46, 47-53, 54, 56, 57, 69, 71, 73-75, 76-99, 100-104, 116-127, 129, 134-138, 141, 143, 148-150, 157-197.

- Casa e Lavoro.** — Anno 1932 : n. 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
- Commercio** (Confederazione Nazionale Fascista dei Commercianti). — Anno 1932, completo.
- Conto Riassuntivo del Tesoro** (Ministero delle Finanze). Anno 1932, completo.
- Dati mensili relativi all'esercizio delle FF. SS.** — Anno 1932, completo.
- Echi e Commenti.** — Anno 1932, completo.
- Economia.** — Anno 1932, completo.
- Esportatore Italiano (L').** — Anno 1932, completo.
- Finanza Locale.** — Anno 1932, dal n. 1 al n. 9.
- Giornale di Agricoltura della Domenica.** — Anno 1932 : dal n. 1 al n. 31, 33, 37, 38, 39, dal n. 41 al 50, 52.
- Giornale Economico (II).** — Anno 1932, completo.
- Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica.** — Anno 1932, completo.
- Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari.** — Anno 1932, Parte 1^a, 2^a, 4^a.
- Giornale di Matematica Finanziaria.** — Anno 1932, completo.
- Giornale di Medicina Militare.** — Anno 1932, completo.
- Indici settimanali di Borsa** (Consiglio Provinciale dell'Economia Corporativa di Milano). Anno 1932, completo.
- Indici settimanali dei prezzi all'ingrosso :** Anno 1932 : n. 1, 3, 5, 7, 8, 11, 13, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 51, 52.
- Industria Italiana delle Conserve Alimentari (L').** — Anno 1932 completo.
- Industria Lombarda (L').** — Anno 1932, n. 2-4, 6-33, 36-52.
- Italia che scrive (L').** — Anno 1932, completo.
- Listino dei prezzi.** — Anno 1932, completo.
- Marina Italiana (La).** — Anno 1932, completo.
- Mutualità Assicurativa.** — Anno 1932, completo.
- Notiziario Economico dell'Argentina** (Ambasciata Italiana in Buenos Aires). — Anno 1932 dal n. 1 al n. 6, dal n. 8 al n. 24.
- Notiziario Economico Commerciale del Brasile** (Ambasciata Italiana in Rio de Janeiro). — Anno 1932 dal n. 109 al n. 121, dal n. 123 al n. 132.
- Nuovi Studi di Diritto, Economia e Politica.** — Anno 1932. Vol. V, fasc. 2, 3, 4, 5.
- Organizzazione Industriale (L').** — Anno 1932, completo.
- Organizzazione Scientifica del Lavoro (L').** — Anno 1932, completo.
- Prezzi correnti delle merci sulla Piazza di Livorno.** — Anno 1932, dal n. 1 al n. 6, dal n. 8 al n. 14.
- Proprietà Edilizia (La).** — Anno 1932, completo.
- Rassegna del Comune di Firenze.** Anno 1932, dal n. 1 al n. 6.
- Rassegna Economica** (Banco di Napoli). — Anno 1932, completo.
- Rassegna Economica dell'Abruzzo Teramano.** — Anno 1932, completo.
- Rassegna Quindicinate dell'Agricoltura** (Banca Nazionale dell'Agricoltura). — Anno 1932, completo.
- Rassegna dell'U. S. I. L. A. (La).** — Anno 1932, completo.
- Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.** — Anno 1932, Vol. LXV, fasc. 1-5, 6-10, 11-15, 16-18, 19-20.
- Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze della R. Università di Cagliari.** Anno 1932, Vol. II, Fasc. 3 e 4.
- Riforma Sociale (La).** — Anno 1932, completo.

- Rivista delle Assicurazioni.** — Anno 1932, completo.
Rivista Bancaria. — Anno 1932, completo.
Rivista del Diritto Commerciale. — Anno 1932, completo.
Rivista di Diritto Penitenziario. — Anno 1932, completo.
Rivista Internazionale del Cinema Educatore. — Anno 1932, completo.
Rivista Internazionale di Scienze e Discipline Ausiliarie. — Anno 1932. Vol. III. fasc. VI.
Rivista Mensile della Città di Venezia. — Anno 1932, completo.
Rivista di Politica Economica. — Anno 1932, completo.
Scientia. — Anno 1932, completo.
Statistica del Commercio Speciale di Importazione ed Esportazione (Ministero delle Finanze). — Anno 1932, completo.
Studi Senesi. — Anno 1932, completo.
Sul Mare. Anno 1932, n. 1, 3, 4, 5, 6.
Tempo (II). Anno 1932, n. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12.
Vita Economica Italiana (La). — Anno 1932, completo.
- Bibliographie d'Hygiène Industrielle (Bureau International du Travail).** Année 1932, complète.
Bulletin de la Banque Nationale de Roumanie. — Année 1932, complète.
Bulletin de la Banque Nationale de Tchécoslovaquie. — Année 1932, complète.
Bulletin de la Banque Nationale de Yougoslavie. — Année 1932, complète.
Bulletin Mensuel de l'Institut International de Coopération Intellectuelle. — Année 1932, complète.
Bulletin Mensuel de l'Office Permanent (Institut International de Statistique). — Année 1932, complète.
Bulletin Mensuel de Statistique Agricole et Commerciale. — Année 1932, complète.
Bulletin Mensuel de Statistique du Royaume de Bulgarie. — Année 1932, complète.
Bulletin Mensuel de Statistique de la Société des Nations. — Année 1932, complète.
Bulletin Mensuel de Statistique de la Statistique Générale de la Grèce. — Année 1932, complète.
Bulletin Officiel du Bureau International du Travail. — Année 1932, complète.
Bulletin de la Statistique Générale de la France. — Année 1932, complète.
Chronique de la Sécurité Industrielle. — Année 1932, complète.
Epargne du monde (L'). — Année 1932, complète.
Hygiène du Travail (Bureau International du Travail). — Année 1932 : n. de 288 à 333.
Indices du Mouvement Général des Affaires en France et Divers Pays. — Année 1932, complète.
Informations Sociales (Bureau International du Travail). — Année 1932. Vol. XLI complet, Vol. XLII complet, Vol. XLIII complet, Vol. XLIV complet.
Journal des Nations (Société des Nations). — Année 1932 : n. de 110 à 143.
Journal de la Société Hongroise de Statistique. — Année 1932, complète.
Journal de la Société de Statistique de Paris. — Année 1932, complète.
Le mouvement Syndical International. — Année 1932, complète.
Le Musée Social. — Année 1932, complète.
Moniteur Officiel du Commerce et de l'Industrie. — Année 1932, complète.

- Rapport Epidémiologique** (Société des Nations). — Année 1932, complète.
- Rapports de l'Office de Statistique de la République Tchecoslovaque.** — Année 1932 : n. 2, 3, 4, 22, 26, 30, 31, 35, 36, 39, 40, 42-100.
- Relevé Hebdomadaire Epidémiologique** (Société des Nations). — Année 1932 n. de 306 à 312, de 314 à 329, de 335 à 356.
- Revue des Etudes Coopératives.** — Année 1932, complète.
- Revue de l'Institut de Sociologie Solvay.** — Année 1932, complète.
- Revue International du Travail.** — Année 1932, complète.
- Revue Internationale de Sciences Administratives.** — Année 1932, complète.
- Revue Trimestrielle de la Direction Générale de la Statistique de Bulgarie.** — Année 1932, 3^{ème} année, fasc. 1, 2.
- Revue Trimestrielle de Statistique de la République Polonaise.** — Année 1932, complète.
- Série Législative** (Bureau International du Travail). — Année 1932, complète.
- Statistique des Prix.** — Année 1932, complète.
- Statistique du Travail.** — Année 1932, complète.
- Société de Banque Suisse.** — Année 1932, complète.
- V. O. K. S.** (Bulletin d'Information de l'U. R. S. S.) — Année 1932, complète.
- Annals of Mathematical Statistics (The).** — Year 1932, complete.
- Bank of Finland.** — Year 1932, complete.
- Births and Deaths.** — Year 1932, complete.
- Bulletin of Business Research.** — Year 1932, Vol. VII, n. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
- Bullettin of Pan American Union.** — Year 1932, complete.
- Bulletin of Wool Manufactures.** — Year 1932, Vol. LXII complete.
- Burroughs Clearing House.** — Year 1932, n. 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Crops and Markets.** — Year 1932, complete.
- Ecology.** — Year 1932, Vol. XIII complete.
- Economica.** — Year 1932, n. 36, 37, 38.
- Economic Journal.** — Year 1932, complete.
- Eugenical News.** — Year 1932, Vol. XVII, complete.
- Eugenics Review.** — Year 1932, Vol. XXIV, complete.
- Guaranty Trust Company.** — Year 1932, complete.
- Human Biology.** — Year 1932, Vol. IV, complete.
- Illinois Health Messenger.** — Year 1932, complete.
- Index.** — Year 1932, complete.
- Indian Journal of Economics.** — Year 1932, Vol. XII, n. III, IV.
- Industrial Bulletin (The).** — Year 1932, complete.
- International Cotton Bulletin.** — Year 1932, Vol. X^o, complete.
- Journal of the American Statistical Association.** — Year 1932, complete.
- The Journal of Political Economy.** — Year 1932, Vol. XL, complete.
- Japan Trade Review.** — Year 1932, Vol. V, n. 3, 4, 5, 6.
- Journal of the Bengal National Chamber of Commerce Calcutta (The).** — Years 1931-32, Vol. VI, n. 2, 3.
- Journal of the Royal Statistical Society.** — Year 1932, Vol. XCV, Part. III, IV.
- Kyoto University Economic Review.** — Year 1932 complete.
- Labour Gazette.** — Year 1932 complete.

- London and Cambridge Economic Service.** — Monthly Bulletin and Suppl. to Monthly Bulletin. Year 1932, complete.
- Michigan Public Health.** — Year 1932, complete.
- Monthly Labor Review.** — Year 1932, Vol. 34 complete; Vol. 35, n. 1, 2, 3, 4.
- Monthly Report Department of Public Health of Toronto.** — Year 1932, complete.
- Monthly Vital Statistics.** — Year 1932. Vol. XII, January, February; Vol. XIII, march, april, may, june, july, august, september, october, november, december.
- Official Year Book of the New South Wales.** — Year 1931-32. Part. I, II, IV, V.
- Political Science Quarterly (The).** — Year 1932. Vol. XLVII complete.
- Prices and Prices-Index (Department of Trade and Commerce Dominion Bureau of Statistics.** — Ottawa). — Year 1932, complete.
- Quarterly Journal of Economics.** — Year 1932, Vol. XLVI, n. 2, 4; Vol. XLVII, n. 1.
- Race Hygiène.** — Year 1932, Vol. II, n. 5, 6; Vol. III, n. 1, 2, 3.
- Review of Economics Statistics.** — Year 1932 complete.
- Social Science Abstracts.** — Year 1932, complete.
- Special Bulletin State of New York.** — Year 1932, nr. 173, 174, 179.
- Statistical Bulletin Metropolitan Life Insurance Company.** — Year 1932, complete.
- The Statistical Monthly.** — Year 1932, complete.
- Statistical Register of the South Wales.** — Year 1931-32, Part I, II, III, V, VI.
- Transactions Actuarial Society of America.** — Year 1932, Vol. XXXIII, Part one nr. 87.
- Allgemeines Statistisches Archiv.** — Jahrgang 1932, Band XXII, Nr. 1, 2, 3, 4.
- Archiv für Rassen und Gesellschafts-Biologie.** — Jahrgang 1932, Band XXVI, Heft 1.
- Archiv für Soziale Hygiene und Demographie.** — Jahrgang 1932, Band VII, Heft 1, 2, 3, 4, 5.
- Berliner Wirtschaftsberichte.** — Jahrgang 1932 vollständig.
- Deutsches Statistisches Zentralblatt.** — Jahrgang 1932 vollständig.
- Hollerith Nachrichten.** — Jahrgang 1932, Heft Nr. 9-19.
- Monatliche Nachweise über den auswärtigen Handel Deutschlands.** — Jahrgang 1932 vollständig.
- Monatsberichte des Oesterreichischen Institutes für Konjunkturforschung.** — Jahrgang 1932 vollständig.
- Monatsbericht des Statistischen Amt der Stadt Berlin.** — Jahrgang 1932 vollständig.
- Weltwirtschaftliches Archiv.** — Jahrgang 1931, Band XXXV, Heft 1, 2, Band XXXVI, Heft 1, 2.
- Wirtschaft und Statistik.** — Jahrgang 1932 vollständig.
- Zeitschrift des Preussischen Statistischen Landesamts.** — Jahrgang 1932, Heft Nr. 1-2.
- Boletim Hebdomadário de Estadística Demographo-Sanitaria de Rio de Janeiro.** — Année 1932, n. 2, 5-6, 8-II, 16-23, 25-29, 34-51.
- Boletim da Inspectoria de Servicos Geographicos.** — Année 1931, n. 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

- Boletim do Instituto de Café.** — Année 1932, complète.
- Boletín de Estadística.** — Année 1932, janvier, mars, avril-juin, juillet-septembre.
- Boletín de Higiene Escolar.** — Année 1931, janvier-février, mars-avril, juillet-août, septembre-octobre.
- Boletín Mensal de Estadística Agro-Pecuaria.** — Année 1932, complète.
- Boletín Mensal de Estadística Demographo-Sanitaria de Cidade de Rio de Janeiro.** — Année 1932 complète.
- Cenově Zprávy** (Rapports sur les prix publiés par l'Office de Statistique de la République Tchèqueoslovaque). — Année 1932, complète.
- Commerce Extérieur de la République Polonaise.** — Année 1932, n. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
- Direcion General de Sanidad** (Buletin hebdomadaire). — Année 1932, 2, 9, 16, 23 janvier, 26 mars, 2, 23, 30 avril, 14, 21, 28 mai, 4, 11, 18, 25 juin, 9, 16, 23, 30 juillet, 6, 13, 20, 27, août, 3, 10, 17, 24 septembre, 1, 8, 29, octobre, 5, 12, novembre, 3, 10, 17, 24 décembre.
- Divulgação de Informaçõs e Propaganda.** Bahia 1932, n. 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12.
- Lwów w Cyfrach** (Léopol en chiffres). — Année 1932, complète.
- Manedsopgaver over Vareomsetningen med Utlandet.** — Année 1932, janvier, février, avril, juin, juillet, août, septembre, octobre, novembre, décembre.
- Mesieni Prehled Zahranicniho Obchodn, Republiky Ceskoslovenske** — Année 1932, complète.
- Pasteur Revista mensual de Medicina.** Mexico. 1932, n. 6, 7, 10, 11, 12.
- Revista de Economia Argentina.** — Année 1932, n. 1, 3, 4, 5, 6.
- Revista Economica.** — Année 1932, complète.
- Revista Juridica de Catalunya.** — Année 1932, janvier-mars, avril-juin, juillet-octobre.
- Revista Mexicana de Puericultura.** Mexico, Anno 1932, n. 20, 25.
- Secretaria de Hacienda y Credito Publico.** — Année 1932, n. 3, 4.
- Statistikai Havifüzetzi.** — Année 1932, complète.
- Statistiske Meddelelser** (Oslo). — Année 1932, complète.
- Statistický Obzor** (Prague). — Année 1932, complète.
- I. A. Ulkomaankauppa** (Helsinki). — Année 1932, complète.
- Wiadomosci Statystyczne** (Informations statistiques de l'Office central de Statistique de la Pologne). — Année 1932, complète.

Libri, Annuari, Opuscoli,
Estratti, ecc.

Livres, Annuaires, Brochures,
Extratts, etc.

Books, Yearbooks Pamphlets,
Reprints, etc.

Bücher, Jahrbücher, Broschü-
ren, Separatdrucke, usw.

- AIMI A. — *Progetto del Campo-scuola*. — Mantova, 1931.
- ALBERTARIO P. — *Affitti agrari e canone variabile*. Torino, 1933.
- ID. — *I rapporti tra locatore e affittuario in una azienda agraria della pianura Pavese negli ultimi 150 anni*. « Rivista di Diritto Agrario », fasc. n. 3, 1932.
- ID. — *L'imponibile di mano d'opera nell'economia agraria del bassopiano lombardo*. « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », dicembre, 1932.
- ID. — *Motori e macchine operatrici in aziende agrarie — Tipo della bassa Lombardia*. Roma, s. d.
- ALBERTI M. — *Poincaré, la stabilizzazione del franco e gli ammassamenti d'oro in Francia*. Milano, 1932.
- ARTOM C. — *L'origine e l'evoluzione delle partenogenesi attraverso i differenti biotipi di una specie collettiva (Artemia salina L.) con speciale riferimento al biotipo diploide partenogenetico di Sète*. Roma, 1931.
- ASSOCIAZIONE FRA LE SOCIETÀ ITALIANE PER AZIONI. — *Relazione sull'attività dei nostri uffici economici nel 1930-IX*. Roma, 1931.
- ATTI DELLA COMMISSIONE PARLAMENTARE chiamata a dare il proprio parere sul progetto di riforma della cambiale. Roma, 1933.
- ATTI DELL'ISTITUTO NAZIONALE DELLE ASSICURAZIONI. Vol. V. Roma, 1933.
- BACHI R. — *Abitazioni e luoghi di lavoro nelle grandi città*. « Economia », Vol. X, n. 2. Roma, 1932.
- ID. — *Gli indici dell'attrazione matrimoniale*. « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », Novembre 1929.
- ID. — *I principali scritti di Rodolfo Benini*. « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », Dicembre, 1929.
- ID. — *La demografia degli ebrei italiani negli ultimi cento anni*. Roma, 1931.
- ID. — *La mobilità della popolazione all'interno delle città europee*. (I^a e II^a parte). Roma, 1932.
- BALELLA G. — *Lezioni di legislazione sugli infortuni del lavoro*. Roma, 1932.
- BALP S. — *La tubercolosi nella provincia di Bergamo*. Bergamo, 1918.
- ID. — *Le sorgenti minerali della provincia di Torino*. Perugia, 1902.
- BANCA D'ITALIA. — *Adunanza generale ordinaria degli azionisti*. Roma, 1933.
- BANCA NAZIONALE DELLA AGRICOLTURA. — *Relazioni e bilancio al 31 dicembre 1932-XI*. Roma, 1933.

- BARBARA M. — *Un grande italiano : Leon Battista Alberti, precursore di Galton*. « La Riforma Medica ». Napoli, 1928.
- BORDIGA O. — *Imprese e tentativi di colonizzazione interna nella Campania*. Roma, 1930.
- BORTOLOTTI E. — *Il calcolo delle unità frazionarie presso gli antichi egizi e le frazioni continue ascendenti*. Bologna, 1932.
- CABRINI A. — *In memoria di Alberto Thomas primo direttore dell'U. I. L.* « Informazioni Sociali ». Maggio, 1932.
- CAMPESE E. — *I caratteri della disoccupazione operaia in Italia*. Roma, 1928.
- CAPRA G. — *La « strada dei Genovesi » nell'Asia Anteriore*. « Le Vie d'Italia e del mondo ». Agosto, 1933.
- CASSA DI RISPARMIO DI TORINO. — *Resoconto dell'anno 1932 approvato dal Consiglio d'Amministrazione in seduta 7 marzo 1933*. Torino, 1933.
- CASSA DI RISPARMIO DI FIRENZE. — *Almanacco per il 1933-XI*.
- CASTALDI L. — *L'uomo sardo*. Cagliari, 1932.
- CASTIGLIONI L. — *Studi intorno alla storia del testo dell'analisi di Senofonte*. Milano, 1932.
- CATERINI F. — *Ancora sul polimorfismo della Terebratula (Pygope) Aspasia Meneghini*. Pisa, 1920.
- ID. — *Che cosa sono i Nemertiti ?* Pisa, 1925.
- ID. — *I vertebrati antropozoici e l'indirizzo sistematico della zoologia*. « Natura ». Vol. XXI. Milano, 1930.
- ID. — *L'allevamento dei cammelli di San Rossore (Pisa)*. « Il Progresso Agricolo ». N. 21-24 e segg. Pisa, 1929.
- ID. — *Mario Canavari*. Pisa, 1929.
- ID. — *Prima coltura nel Pisano dell'Anthus cervinus Keys et Blas. ex Pallas*. Pisa, 1932.
- ID. — *Resti fossili di uccelli nella breccia ossifera del Monte Argentario e del deposito quaternario dell'isola di Pianosa*. Pisa, 1921.
- ID. — *Resti di Rhinoceros Etruscus Fale, rinvenuti a Montefoscoli (Val d'Era)*. Pisa, 1922.
- ID. — *Rinvenimento di terreni terziari non marini in una località del Volterrano*. Pisa, 1922.
- ID. — *Uccelli, insetti ed agricoltura*. « Il Progresso Agricolo ». Anno XVI, n. 6, 7, 8 e segg. Pisa, 1922.
- CATTEDRA AMBULANTE DI AGRICOLTURA PER LA PROVINCIA DI PADOVA. — *Annuario 1931*. Padova, 1932.
- CESARI E. e CESARI C. — *Piceni di ieri e di domani*. Ascoli Piceno.
- CESARI E. — *I consumi dell'energia elettrica in Italia durante l'anno 1931*. « L'Energia Elettrica ». Fasc. IV, Vol. X, 1933. Milano, 1933.
- CHESSA F. — *La crisi mondiale e la distribuzione dell'oro*. « Rivista Bancaria ». Dicembre, 1931. Milano.
- CHIANTELLA G. — *La classificazione professionale della popolazione di Genova secondo il VII° censimento*. « Rivista Municipale - Genova ». Maggio, 1933-XI.
- CIANCI E. — *Sulla costruzione di un indice degli scambi interni in Italia*. Roma, 1932.
- CIGANA E. — *L'uva*. Padova, s. d.

- COLLORIDI F. — *Durata della gravidanza, ampiezza del bacino materno e sviluppo del neonato*. Fidenza, 1932.
- ID. — *La narcosi basale col pernocton nella ginecologia operativa*. Fidenza, 1933.
- ID. — *Le variazioni del peso specifico corporeo durante la vita intrauterina*. «Atti e Memorie della Soc. Lombarda di Ostetricia e Ginecologia». Vol. I. Fasc. I. 1933. Fidenza, 1933.
- ID. — *Ricerche nel sangue sull'equilibrio acido-basico, sul ricambio idrocarbonato e sulla ritenzione ureica pre e post-operatorii con particolare riguardo alle cosiddette «narcosi basali»*. «Annali di Ostetricia e Ginecologia». Milano, 1932.
- CONFEDERAZIONE GENERALE FASCISTA DELL'INDUSTRIA ITALIANA. — *Lo sviluppo dell'industria italiana nel 1° decennio dell'Era Fascista*. Roma, 1932.
- ID. — *Relazione sull'attività dei nostri uffici economici nel 1930-IX*. Roma, 1931.
- CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA CORPORATIVA DI TRIESTE. — *Statistica del Commercio e della Navigazione di Trieste per l'anno 1931*. Trieste, 1932.
- ID. — *Statistica del commercio e della navigazione di Trieste per l'anno 1932*. Trieste, 1931.
- DE FRANCISCI P. — *Discorso per l'inaugurazione dell'anno accademico 1931-32*. «Annuario dell'Università di Roma». 1931-32.
- DELL'AGNOLA C. A. — *Relazione sull'anno accademico 1930-31*. (R. Istituto Superiore di Scienze economiche e commerciali), Venezia, 1932.
- DE SIMONE B. — *Gli infortuni dell'industria italiana*. Rivista «Securitas». Marzo, 1933.
- DONAZZOLO P. e SAIBANTE M. — *Lo sviluppo demografico di Verona e della sua provincia dalla fine del secolo XV ai giorni nostri*. «Metron». Vol. VI, n. 3-4.
- DULZETTO F. — *L'azione degli estratti tiroidei sul rapporto sessuale dei nati nel Patto Albino*. «Archives de Biologie». Liegi, 1928.
- EINAUDI I. — *Ancora intorno al modo di scrivere la storia del dogma economico*. Torino, 1932.
- ID. — *Bibliografia di Achille Loria*. «La Riforma Sociale». Suppl. al n. 5, 1932.
- ENDRICK E. — *Il diritto del lavoro nella Russia Sovietica e nell'Italia Fascista*. Cagliari, 1933.
- ENTE BIELLESE DI ASSISTENZA AGLI OPERAI. — *Statistica degli operai delle industrie biellesi e delle loro famiglie al 15 gennaio 1932*. Biella, 1932.
- FEDERAZIONE NAZIONALE DELLA PROPRIETÀ EDILIZIA. — *Il mercato edilizio*. — *Dati statistici*. I, II e III quadrimestre 1932.
- ID. — *Il mercato edilizio*. Dati statistici per il 1° quadrimestre 1933.
- FEDERAZIONE PROVINCIALE FASCISTA FERRARESE. — *I moduli per l'inchiesta agraria del ferrarese*. Ferrara, 1928.
- FEDERAZIONE REGIONALE DELLE CASSE DI MALATTIA DELLA VENEZIA TRIDENTINA. — *L'assicurazione contro le malattie*. Trento, 1933.
- FERRARI G. — *L'Istituto di Statistica della R. Università di Padova*. «Barometro Economico» Anno V, n. 7.
- FORTUNATI P. — *Articoli vari e recensioni*. Padova, 1932.

- FORTUNATI P. — *Aspetti statistici della vita dell'Ateneo Ferrarese dal secolo XV ai giorni nostri*. Ferrara, 1932.
- ID. — *Efficienza statistica ed efficienza corporativa*, « Nuovi Problemi di Politica, Storia ed Economia ». Fasc. 1, 2, 3. Anno III. Ferrara, 1932.
- ID. — *La popolazione friulana dal secolo XVI ai giorni nostri* « Atti del Congresso Internazionale per gli studi della Popolazione ». Roma, 1932.
- ID. — *Polemiche statistiche*. Ferrara, 1932.
- FRANCIONI G. — *Valutazione della capacità al lavoro nei minorati della vita*. Roma, 1933.
- FRASSETTO F. — *I principali caratteri antropologici e costituzionalistici studiati in 1450 genitori prolifici della regione emiliana*. « Atti del Congresso Internazionale per gli studi della Popolazione. Roma, 1932.
- FRISELLA-VELLA G. — *La « Bilancia del Dare e dell'Avere » di una regione e le sue interdipendenze con quella internazionale*. « Problemi Siciliani ». N. 1, 1933.
- GABBI U. — *Medicina politica e dottrina fascista*. « Politica Sociale ». Maggio-giugno, 1931.
- GALANTI G. — *Conservazione del portafoglio e vigilanza amministrativa nelle Assicurazioni sulla vita*. Roma s. d.
- GALVANI I. — *I centri del territorio e della popolazione italiana (1931) e quelli della popolazione industriale e commerciale (1927)*. Appendice al « Compendio Statistico Italiano 1933-XII ».
- GATTI A. — *Tavole di mortalità della popolazione italiana maschile in relazione ai censimenti 1901-1911-1921 e tavole di commutazione e attuariali corrispondenti*. Torino, 1932.
- GEMELLI A. — *Economia e filosofia*. « Rivista Internazionale di Scienze Sociali e Discipline Ausiliarie ». Anno XLI. Fasc. 2. Marzo, 1933.
- GHISALBERTI F. — *Arnolfo d'Orléans - Un cultore di Ovidio nel secolo XII*. Milano, 1932.
- GINI C. — *Problemi della popolazione*. Bari, 1928.
- GIUFFRIDA V. — *Il mercato edilizio italiano nel quinquennio 1927-31*. Roma, 1932.
- GOBBI ULISSE. — *La cooperazione dell'economia capitalista all'economia corporativa*. Milano, 1932.
- GRAFFI E. — *La prima mestruazione, la menopausa ed il periodo riproduttivo in relazione ad alcuni dati metrici nelle donne prolifiche emiliane*. « Endocrinologia e Patologia Costituzionale ». Vol. VIII. Fasc. I. Bologna, 1933.
- ID. — *Le relazioni antropometriche fra anche e spalle dei genitori prolifici emiliani* « Atti del Congresso Internazionale per gli studi della popolazione ». Roma, 1932.
- INCARNATI I. — *La battaglia della sterlina*. Roma, 1933.
- INSOLERA F. — *Probabilità e sopravvivenza*. Estr. « Atti dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni ». Vol. V. Roma, 1933.
- ID. — *Su nuove funzioni di sopravvivenza di vari ordini nel senso di Quiquet*. Estr. « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari ». N. 2, aprile 1933.
- IPPOLITO E. — *Nuove tavole del punto studiato*. Palermo, 1922.
- ISTITUTO NAZIONALE DELLE ASSICURAZIONI. — *Conferenze di cultura assicurativa dell'anno 1932*. Atti Vol. V. Roma, 1933.

- ISTITUTO NAZIONALE DELLE ASSICURAZIONI. — *Relazioni del Consiglio di Amministrazione e del Collegio dei Sindaci sul bilancio 1932*. Roma, 1933.
- ID. — *Relazione sull'andamento della gestione nel quinquennio 1927-31*. Roma, 1932.
- ID. — *XX anni - 1913-1933*. Roma, 1933.
- ISTITUTO NAZIONALE PER L'ESPORTAZIONE. — *Relazione sull'attività dell'I. N. E presentata al Consiglio Generale nell'adunanza del 30 maggio 1932-X*. Roma, 1932.
- JACOBITTI L. — *La costruzione del benessere economico — Studi e proposte*. Milano, 1932.
- LASORSA G. — *Recenti studi di demografia ebraica*. Estr. « Rivista Italiana di Statistica, Economia e Finanza ». Bologna s. d.
- LENTI L. — *Alcuni indici sulle industrie tessili italiane*. « Giornale degli Economisti ». Novembre, 1932.
- LEVI-BIANCHINI M. — *Il suicidio degli alienati internati negli ospedali psichiatrici*. Napoli, 1933.
- LIVI L. — *Le fluttuazioni della natalità in rapporto allo stato sanitario ed economico del popolo*. Estr. « Atti dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni ». Vol. V. Roma, 1933.
- MARAZZANA G. R. — *L'importazione (Cenerentola dell'economia nazionale)*. Crema, 1931.
- MARIOTTI A. — *I pionieri del turismo*. « Bollet. della R. Università Italiana per stranieri di Perugia », Ottobre, 1932.
- MARONGIU A. — *I parlamenti di Sardegna nella storia e nel diritto pubblico comparato*, Roma, 1932.
- MASCI G. — *Natura ed effetti economici del contratto collettivo di lavoro*. Roma, 1932.
- ID. — *Sulla determinazione statistica della curva di domanda*. Estr. « Rivista Italiana di Statistica, Economia e Finanza ». Bologna, 1932.
- MICHELIS R. — *Ancora intorno al modo di scrivere la storia del dogma economico*. Torino, 1932.
- MIELE GIOVANNI, — *La manifestazione di volontà del privato nel diritto amministrativo*. Roma, 1931.
- MINISTERO DELLE COLONIE. — *Statistica del movimento commerciale marittimo*. Roma, 1931.
- MINISTERO DELLE COMUNICAZIONI. — *Relazione per l'anno finanziario 1931-32*. Roma, 1933.
- MINISTERO DELLE CORPORAZIONI. — *Annuario per le industrie chimiche e farmaceutiche*. Anno XIV-1931. Roma, 1932.
- MINISTERO DELLE FINANZE. — *Movimento commerciale del Regno d'Italia nel 1930*. Roma, 1933.
- ID. — *Movimento della navigazione nell'anno 1929*. Roma, 1932.
- MINISTERO DELLA GUERRA — *Cinquantenario della Scuola di applicazione di Sanità Militare*. Firenze, 1933.
- ID. — *Della leva di terra sui giovani nati nell'anno 1909*. Roma 1932.
- ID. — *La leva di terra sui giovani nati nell'anno 1901*. Roma, 1933.
- ID. — *Relazione medico-statistica delle condizioni sanitarie del R. Esercito nell'anno 1929*. Roma 1933.

- MINISTERO DEI LAVORI PUBBLICI. — *Grandi utilizzazioni idrauliche per forza motrice*. Roma, 1933.
- ID. — *La produzione di energia elettrica in Italia nel 1931*. Roma, 1932.
- ID. — *La produzione di energia elettrica in Italia nel 1932*. Roma, 1933.
- ID. — *L'azione del Governo Fascista per la ricostruzione delle zone danneggiate dalle calamità*. Terni. s. d.
- ID. — *Le migrazioni interne in Italia. Dati statistici*. (Migrazioni del 1928). Roma, 1929.
- ID. — *Le opere pubbliche al 31 dicembre 1931*. Roma, 1932.
- ID. — *Risorse idrauliche per forza motrice utilizzate e ancora disponibili*. Vol. I^o (Lombardia). Roma, 1932.
- ID. — *Idem*. Vol. II^o (Piemonte). Roma, 1932.
- MINISTERO DELLA MARINA. — *Statistica sanitaria dell'Armata per gli anni 1925, 1926, 1927, 1928*. Roma, 1932.
- ID. — *Statistica sanitaria dell'armata per gli anni 1929-30*. Roma, 1933.
- MIRIOLETTI B. — *Le monografie delle provincie d'Italia*. Torino, 1931.
- MJÖEN J. A. — *Delinquenza e genio alla luce delle biologia*. Estr. «Atti del I^o Congresso Italiano di Eugenetica Sociale». Milano, 1924.
- MONOPOLI DI STATO. — *Relazione e Bilancio Industriale per l'esercizio 1/7/1931-30/6/1932*. Roma, 1933.
- MORTATI. — *L'ordinamento del Governo nel nuovo diritto pubblico italiano*. Roma, 1931.
- NICEFORO A. — *Contributo allo studio ed alla rappresentazione della normalità degli individui e dei fenomeni*. «Le Assicurazioni Sociali», Luglio-agosto, 1932.
- ORESTANO F. — *Riassunto generale e conclusioni del «Convegno Volta»*. Roma, 1932.
- PANIZZA T. — *Per la storia della carestia dell'anno 1816 in Trento*. Trento, 1932.
- PANUNZIO S. — *L'insegnamento politico in Italia e la Facoltà di Scienze Politiche*. «Nuova Antologia», 16/6/1932. Roma.
- ID. — *Per il Fascismo*. «Atti del Convegno di Ferrara». Roma, 1932.
- PASTORELLO DOMENICO. — *La Proibizione in Italia*. Milano, 1933.
- PATTI FRANCESCO. — *Di alcuni aspetti della Patologia Ostetrico-Ginecologica*. Catania, 1932.
- ID. — *La denuncia della castrazione femminile*. Estr. «Rivista Sanitaria Siciliana», N. 21. Palermo, 1930.
- PERRONE P. e PERRONE M. — *L'«Ansaldo», la guerra ed il problema nazionale delle miniere di Cogne*. Genova. s. d.
- PERRONI F. — *L'Archivio di Stato in Trieste*. Estr. «Ad Alessandro Luzio gli Archivi di Stato italiani - Miscellanea di Studi Storici». Firenze.
- PIERACCINI C. — *La frequenza della variabilità dei caratteri morfologici cranio-facciali ricercata comparativamente nell'uomo e nella donna*. Torino, 1932.
- PONTECORVO G. — *Pratomagno e appennino casentino*. Firenze, 1932.
- POPESCO D. — *L'Italia d'oggi*. Roma.
- PRESIDENZA DEL CONSIGLIO DEI MINISTRI. — *Le migrazioni interne in Italia nell'anno 1929*. Roma, 1931.
- ID. — *Le migrazioni interne in Italia nell'anno 1930*. Roma, 1930.
- ID. — *Le migrazioni interne in Italia nell'anno 1932*. Roma, 1932.

- RIVA-SANSEVERINO L. — *Il diritto di privativa nel contratto di lavoro*. Roma, 1932.
- ID. — *Salario minimo e salario corporativo*. Roma, 1931.
- ROSSI G. — *La resa del bestiame da macello*. Teramo. s. d.
- SACERDOTI G. M. — *Invalidi e orfani di guerra — Cittadini divenuti invalidi per la causa nazionale — Orfani di caduti per la causa nazionale*. Roma. s. d.
- SAIBANTE M. — *I profitti delle Società per azioni e la concentrazione dei capitali industriali*. Estr. «Metron». Vol. VI, n. 1. Roma, 1926.
- ID. — *La concentrazione della popolazione*. Estr. «Metron», Vol. VII, n. 2. Roma, 1928.
- SANDONÀ A. — *Tunisi. Gli avvenimenti del 1878 alla luce di nuovi documenti*. Estr. «L'Ambrosiano». Milano, 1931.
- SAVORGNAN F. — *Intorno al problema dell'estinzione dei popoli selvaggi*. Estr. «Rivista di Antropologia». Vol. XXVIII. Roma. 1928-29.
- SCAPARRO M. — *I collegi artigiani nell'epoca romana*. Tripoli.
- ID. — *L'artigianato tripolino*. Tripoli. s. d.
- SEMINARIO MATEMATICO E FISICO DI MILANO. — *Rendiconti*. Milano, 1932.
- SENATO DEL REGNO. — *Il discorso di S. E. Mussolini sul «Patto a Quattro»*. (Seduta del Senato del Regno del 7 giugno 1933-XI). Roma, 1933.
- ID. — *L'andamento del bilancio dello Stato e i debiti di guerra. L'imposta complementare e l'accertamento induttivo*. Roma, 1932.
- ID. — *Le Società anonime. Lavori contro la disoccupazione*. (Discorsi del Sen. RICCI del 25 e 28 marzo 1933). Roma, 1933.
- ID. — *Osservazioni sul bilancio delle Ferrovie e sul movimento marittimo del 1932-33*. Roma, 1933.
- ID. — *Per un giusto trattamento del titolo nominativo*. (Discorso del Sen. RICCI del 16 marzo 1932). Roma, 1932.
- SENSINI G. — *Studi di scienze sociali*. Vol. I^o. Roma, 1932.
- SERGOWSKI N. — *Introduzione alla teoria dell'assicurazione incendi*. Torino, 1933.
- SIMONCELLI D. — *I consorzi obbligatori nel regime corporativo*. Estr. «Rivista italiana di Statistica, Economia e Finanza». Bologna.
- SOCIETÀ REALE MUTUA DI ASSICURAZIONI. — *In memoria di Mario Minella (1885-1925)*. Torino, 1932.
- SPANO N. — *La città universitaria di Roma*. Estr. «La Scuola Superiore». Roma, aprile 1933.
- STACKELBERG H. — *Sulla teoria del duopolio e del polipolio*. Estr. «Rivista Italiana di Statistica, Economia e Finanza». Anno V, n. 2. Bologna, giugno, 1933.
- TAGLIACCOZZO G. — *Economia e massimo edonistico collettivo*. Padova, 1933.
- TESTA V. — *Il diritto di espropriazione delle aree fabbricate in relazione al problema delle abitazioni ed allo sviluppo edilizio dei centri urbani*. Roma, 1928.
- TODISCO A. — *Le origini del nazionalismo imperialista in Italia*. Roma. s. d.
- TONIOLO C. — *L'industria dell'azoto sintetico nella crisi mondiale*. Estr. «Atti del IV Congresso Nazionale di Chimica Pura ed Applicata». Roma, 1932.
- TRICOMI F. — *Risoluzione di un problema demografico*. «Atti R. Accademia delle Scienze di Torino». Torino, s. d.

- TUMA. — *La teoria economica della riassicurazione*. Torino, 1933.
- UFFICIO DI STATISTICA DEL CANADÀ. — *Manuale ufficiale sulle condizioni presenti e sul recente progresso del Dominio*. Ottawa, 1932.
- UNIONE NAZ. FASC. DELLE INDUSTRIE ELETTRICHE. — *La produzione dell'energia in Italia nell'annata 1932*. Milano, 1933.
- UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE. — *Annuario*. Anno accademico 1932-33. Milano,
- ID. — *Contributi del laboratorio di Statistica*, Milano, 1932.
- R. UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI. — *Annali dell'Istituto di Statistica*. Vol. III. Bari, 1932.
- R. UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI. — *Rendiconti del Seminario della facoltà di Scienze*. Vol. I^o. 1931, Padova, 1931.
- R. UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA. — *Studi nelle scienze giuridiche e sociali*. Pavia, 1932.
- UNIVERSITÀ LIBERA DI FERRARA. — *Aspetti statistici della vita dell'Ateneo Ferrarese dal secolo XV ai giorni nostri*. Ferrara, 1932.
- VIANA O. — *La legalizzazione dell'aborto nella Russia sovietica*. Estr. «Rassegna Clinico-Scientifica», N. 5, 1931. Milano.
- ID. — *L'economia italiana nel commercio internazionale*, Roma.
- VITO F. — *I Sindacati industriali*. Milano, 1932.
- ID. — *La collaborazione economica internazionale*, Milano, 1932.
- VIVANTE L. — *I fenomeni precognitivi. Bibliografia e cenno storico sulle teorie*. Estr. «La Ricerca Psicica». Milano, 1933.
- ZUCCHI G. — *La crisi economica del mondo nel rapporto tra la ricchezza reale e la ricchezza simbolica*, Milano, 1933.
- ZUCCHINI M. — *Romagna, Toscana, Val di Sieve e Val di Bisenzio*. Firenze, 1932..
- BANCO DE LA NACIÓN ARGENTINA. — *Rapport et bilan général exercice 1931*. Buenos-Ayres, 1931.
- BANK POSKI. — *Compte-rendu des opérations de la Pologne pendant l'année 1931*. Varszawa, 1932.
- BANK VOOR HANDEL, EN SCHEEPVAART N. V. — *Rapport annuel*. Rotterdam, 1932.
- BANQUE NATIONALE DE GRÈCE. — *Compte-rendu des opérations de l'année 1932*, Athènes, 1933.
- BOUSQUET G. H. — *Précis de sociologie d'après Vilfredo Pareto*. Paris.
- BUREAU CENTRAL DE STATISTIQUE DE FINLANDE. — *Annuaire statistique de la Finlande*, Helsinki, 1932.
- BUREAU DE STATISTIQUE DE L'ÉTAT LETTON. — *Annuaire statistique de la Lettonie pour l'année 1931*, Riga, 1932.
- ID. — *Commerce extérieur et transit de la Lettonie en 1926*. Riga, 1927.
- ID. — *Idem. en 1932*. Riga, 1933.
- ID. — *Etat de l'agriculture en Lettonie en 1931*. Riga, 1932.
- ID. — *Idem en 1932*. Riga, 1933.
- ID. — *Recensement de la production agricole en Lettonie dans l'année 1929-30 (1-a e 1-b)*. Riga, 1932. x x
- ID. — *Idem. (2-a e 2-b)*. Riga, 1933.

- BUREAU DE STATISTIQUE DE L'ÉTAT LETTON. — *Statistique de l'hygiène publique en 1931*. Riga, 1932.
- Id. — *Statistique des finances en 1933*. Riga, 1933.
- Id. — *Statistique du travail*. 1930. Riga, 1931.
- Id. — *Idem* - 1931. Riga, 1932.
- BUREAU CENTRAL DE STATISTIQUE DE LA LITHUANIE. — *La Lithuanie en chiffres 1918-1928*.
- BUREAU INTERNATIONAL DU TRAVAIL. — *Assurance, Chômage et diverses formes d'assistance aux chômeurs*. Genève, 1933.
- Id. — *Idem. Rapport supplémentaire*. Genève, 1933.
- Id. — *Durée du travail et chômage*. Genève, 1933.
- Id. — *La Conciliation et l'arbitrage des conflits du travail*. Genève, 1933.
- Id. — *L'année social 1932*. Genève, 1933.
- Id. — *La réparation des maladies professionnelles. Revision partielle de la convention concernant la réparation des maladies professionnelles*. Genève, 1933.
- Id. — *La sécurité dans la fabrication et l'utilisation du celluloïd*. Genève, 1933.
- Id. — *L'assurance Invalidité, Vieillesse, Décès*. Genève, 1933.
- Id. — *Idem, Suppl. au rapport*. Genève, 1933.
- Id. — *L'assurance Invalidité — Vieillesse — Décès, obligatoire*. Genève, 1933.
- Id. — *Les conventions collectives dans l'Agriculture*. Genève, 1933.
- Id. — *Les statistiques des migrations*. Genève, 1932.
- Id. — *Pensions non contributives*. Genève, 1933.
- Id. — *Pneumoconioses (essai bibliographique)*. Genève, 1932.
- Id. — *Recueil international de jurisprudence du travail*, 1931. Genève, 1933.
- Id. — *Réduction de la durée du travail*. Genève, 1933.
- Id. — *Conférence internationale des Statisticiens des Migrations*. Genève, 1933.
- COSTANTIN C. — *Contribution à l'étude des questions Ligures*. Vienne, 1932.
- Id. — *Le peuplement du bassin du Rhône*. Vienne, 1930.
- CONFEDERAZIONE NAZIONALE SINDACATI FASCISTI DELL'AGRICOLTURA. — *L'organisation scientifique du travail agricole en Italie* (Résumé présenté au IV Congrès International de l'Organisation scientifique du travail). Paris, 1929.
- CONFÉRENCE INTERNATIONALE DU TRAVAIL. — *Assurance, chômage et diverses formes d'assistance aux chômeurs*. Genève, 1933.
- Id. — *Les modes de repos et d'alternance des équipes dans les verreries à vitre automatiques*. Genève, 1933.
- Id. — *Suppression des bureaux de placement payants*. Genève, 1932.
- Id. — *Idem*. Genève, 1933.
- COSENTINI F. — *Le droit comparé et l'« American Common Law »*.
- DE OLIVEIRA-SALAZAR A. — *Comptes publics de l'année financière 1931-32*. Lisbonne, 1932.
- DIRECTION GÉNÉRALE DE LA STATISTIQUE DE BULGARIE — *Résultats du recensement des établissements industriels et commerciaux dans le Royaume de Bulgarie*. Sofia, 1932-33.
- Id. — *Statistique agricole pour l'année 1930*. Sofia, 1931.
- Id. *Idem*, pour l'année 1931. Sofia, 1933.
- Id. — *Statistique criminelle. Crimes et délits et individus jugés pendant les années 1910, 1911 et 1920-29*. Sofia, 1933.

- DIRECTION GÉNÉRALE DE LA STATISTIQUE DE BULGARIE. — *Statistique de l'industrie encouragée dans le Royaume de Bulgarie*. Sofia, 1932.
- ID. — *Statistique des accidents du travail dans le Royaume de Bulgarie pendant les années 1928 et 1929*. Sofia, 1932.
- ID. — *Statistique des Coopératives dans le Royaume de Bulgarie en 1929*. Sofia, 1931.
- ID. — *Idem, en 1930*. Sofia, 1932.
- ID. — *Statistique du commerce du Royaume de Bulgarie avec les pays étrangers en 1931*. Sofia, 1932.
- ID. — *Annuaire Statistique 1932*. Sofia, 1931.
- ID. — *Mouvement de la population dans le Royaume de Bulgarie en 1930*. Sofia, 1932.
- DUPRAT G. L. — *La prévision sociologique et les structures ethniques*.
- FINLAND OFFICIELLA STATISTIK. — *L'imposition sur le revenu et la fortune pour l'année 1929*. Helsingfors, 1932.
- ID. — *Statistique des industries*. Helsingfors, 1933.
- GEMELLI A. — *Observations sur la sélection des pilotes aviateurs*. Estr. « Le Travail Humain ». Tome I, n. 1. 1933.
- GIDE CH. & OUALID W. — *Le Bilan de la guerre pour la France*. Paris.
- GUMBEL E. J. — *Calcul des probabilités. La plus petite valeur parmi les plus grandes*. Paris.
- HALBWACHS M. — *L'évolution des besoins dans les classes ouvrières*. Paris, 1933.
- ID. — *Recherches statistiques sur la détermination du sexe à la naissance*. Paris, 1933.
- HAMBURGER L. — *Analogie des fluctuations économiques et des oscillations de relaxation*. Suppl. aux « Indices du mouvement des affaires en France et en divers pays » Paris. Janvier, 1931.
- ID. — *Principes et directives économiques au point de vue des sciences naturelles*. Id., Paris, 1931.
- INSTITUT AMERICAIN DE DROIT ET DE LÉGISLATION COMPARÉE. — *Code International du travail intellectuel*. Mexico, 1932.
- INSTITUT INTERNATIONAL D'AGRICULTURE. — *Documentation statistique sur la production, le commerce et les prix des céréales*. Roma, 1931.
- ID. — *Le maïs dans le commerce mondial*. Roma, 1932.
- ID. — *Note sur le crédit agricole international*. Roma, 1931.
- ID. — *Note sur la situation du marché mondial du blé*. Roma, 1931.
- ID. — *Principales mesures prises dans divers pays pour faire face à la crise du blé*. Roma, 1931.
- ID. — *Propositions et vœux des réunions internationales récentes concernant le blé*. Roma, 1931.
- LAVOLLÉE R. — *Les classes ouvrières en Europe*. 2 vol. Paris, 1882.
- LEVASSEUR E. — *Histoire des classes ouvrières*, 2 vol. Paris, 1867.
- LUCHAIRE J. — *Observation sur la méthode d'une statistique de la vie intellectuelle*. (S. d. N.).
- MARCH L. — *Forces actives et fiscalité en quelques pays*. Suppl. aux « Indices du mouvement des affaires en France et en divers pays ». Paris, avril, 1932.

- MARIOTTI A. — *Le rôle du tourisme dans l'économie nationale*. Estr. « L'Égypte contemporaine ». Le Caire, 1933.
- MILDSECKUCH V. — *Les revenus chez nous et en Prusse d'après les résultats de l'impôt sur le revenu*. Praha, 1932.
- MILHAUD E. — *Un projet d'action immédiate contre le chômage et contre la crise*. Genève, 1932.
- MILLIoud M. — *La caste dominante allemand*. Paris, 1916.
- MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE. — *Répartition et Rendement des Cultures*. Bruxelles, 1931.
- ID. — *Évaluation provisoire des recensements du printemps 1932*. Bruxelles, 1932.
- NARDI V. — *L'organisation en masse du travail agricole et la colonisation en Italie*. (Note présentée au Congrès International de Génie Rural - Liège, 1930). Roma, 1930.
- NORGES OFFISIELLE STATISTIKK. — *Annuaire des chemins de fer Norvégiens*. 1931-32. Oslo, 1933.
- ID. — *Assurance de l'Etat contre les accidents des marins, pêcheurs, etc.* Oslo, 1933.
- ID. — *Assurance de l'Etat contre les accidents pour les travailleurs de l'industrie, etc.* Oslo, 1933.
- ID. — *Finances des communes pendant l'année 1930-31*. Oslo, 1933.
- ID. — *Grandes Pêches maritimes*. Oslo, 1933.
- ID. — *Lapons et Quaines — Sujets étrangers — Aveugles, sords-muets, idiots et aliénés*. Oslo, 1933.
- ID. — *L'industrie laitière de la Norvège en 1931*. Oslo, 1933.
- ID. — *Rapport sur l'état sanitaire et médical pour l'année 1930*. Oslo, 1933.
- ID. — *Service vétérinaire civil 1931*. Oslo, 1933.
- ID. — *Sociétés d'assurances 1931*. Rapport du Conseil d'assurance. Oslo, 1932.
- ID. — *Statistique des banques privées par actions et des caisses d'épargne pour l'année 1932*. Oslo, 1933.
- ID. — *Statistique des mines et usines en Norvège en 1931*. Oslo, 1932.
- ID. — *Statistique des mines et usines en Norvège en 1932 ; données de Svalbard pour l'année 1931*. Oslo, 1933.
- ID. — *Statistique des télégraphes et des téléphones de l'Etat de Norvège pour l'année financière 1931-32*. Oslo, 1933.
- ID. — *Statistique du commerce de la Norvège pendant l'année 1931*. Oslo, 1933.
- ID. — *Statistique du commerce de la Norvège pendant l'année 1932*. Oslo, 1932.
- ID. — *Statistique industrielle de la Norvège pour l'année 1931*. Oslo, 1933.
- ID. — *Statistique postale pour l'année 1932*. Oslo, 1933.
- ID. — *Superficies agricoles et élevage du bétail de l'année 1932*. Oslo, 1932.
- NORVÈGE. — *Annuaire statistique*. Oslo, 1932.
- ID. — *Idem*. Oslo, 1933.
- OFFICE CENTRAL DE STATISTIQUE DE LA RÉPUBLIQUE POLONAISE. — *Abatage des animaux de ferme en 1931*. Warszawa, 1933.
- ID. — *Bilan des paiements de la Pologne pour l'année 1930*. Warszawa, 1933.
- ID. — *Budgets des familles ouvrières* (Résultats de l'enquête effectuée à Varsovie, à Lodz, dans le Bassin de Dabrowa et en Haute Silesie). Warszawa, 1933.
- ID. — *Constructions des bâtiments en Pologne en 1931*. Warszawa, 1933.
- ID. — *Le petit annuaire statistique de la Pologne*. Warszawa, 1933.

- OFFICE CENTRAL DE STATISTIQUE DE LA RÉPUBLIQUE POLONAISE. — *Logements. Données provisoires sur la base du deuxième recensement général de la population du 9/12/1931.* Warszawa, 1933.
- ID. — *Régions d'élevage, production et consommation de la viande en Pologne.* Warszawa, 1933.
- ID. — *Répertoire des communes de la République Polonaise.* Warszawa, 1933.
- ID. — *Statistique agricole 1931-32.* Warszawa, 1933.
- ID. — *Statistique des administrations autonomes.* Warszawa, 1933.
- ID. — *Statistique des entreprises commerciales en Pologne.* Warszawa, 1932.
- ID. — *Statistique du service postal, télégraphique et téléphonique pour l'année 1931.* Warszawa, 1932.
- ID. — *Idem pour l'année 1932.* Warszawa, 1933.
- OFFICE CENTRAL ROYAL HONGROIS DE STATISTIQUE. — *Annuaire statistique Hongrois. Vol. XXXIX.* Budapest, 1933.
- ID. — *Données de statistique économique de l'Hongrie 1926-1932.*
- OFFICE DE STATISTIQUE DE LA RÉPUBLIQUE TCHÉCOSLOVAQUE. — *Industrie meunière dans la République Tchécoslovaque pendant la campagne du 1/7/1924 au 30/6/1925.* Prague 1932.
- ID. — *Arbres et arbustes fruitiers dans la République Tchécoslovaque d'après l'état au 20 septembre 1930.* Prague, 1932.
- ID. — *Centimes additionnels autonomes portant sur les impôts directs en 1930.* Prague, 1932.
- ID. — *Commerce extérieur de la République Tchécoslovaque.* Prague, 1932.
- ID. — *Ecoulement des marchandises tchécoslovaques exportées, via le port franc de Hambourg, à destination d'outre-mer.* Prague, 1932.
- ID. — *Finances des communes, districts et provinces de la Tchécoslovaquie pour l'année 1929.* Prague, 1932.
- ID. — *Fortune des personnes physiques relevées dans la province de Bohême lors de l'établissement de la taxe sur la fortune en 1919.* Prague, 1932.
- ID. — *Industrie meunière dans la République Tchécoslovaque pendant les campagnes du 1/7/1926 au 30/6/1927 et du 1/7/1927 au 30/7/1928.* Prague, 1931.
- ID. — *Manuel statistique. IV.* Prague, 1932.
- ID. — *Statistique des Impôts pour 1927.* Prague, 1931.
- ID. — *Superficies ensemencées et récoltées des produits agricoles et cultures fruitières en 1929.* Prague, 1933.
- OFFICE PERMANENT DE L'ISTITUT INTERNATIONAL DE STATISTIQUE. — *Annuaire international de Statistique. IV : Mouvement de la population (Amérique).* La Haye, 1920.
- PERIETEANN A. — *Traité de mécanique économique.* Paris, 1932.
- PIKLER E. — *La dynamique monétaire et les analogies mécaniques.* Budapest, 1933.
- ID. — *L'équilibre et la crise des transports.* Budapest, 1933.
- POLLAK W. L. — *La théorie et la pratique de l'analyse des périodogrammes.* Praha, 1932.
- PRÉFECTURE DE LA SEINE. — *Annuaire statistique de la ville de Paris.* Paris, 1932.
- REZNY S. — *Sur les indices des prix de gros.* Prague, 1932.
- RICHARDSON J. H. — *Les relations industrielles en Grande-Bretagne.* Genève, 1933.

- ROYAUME DE ROUMANIE. — *Annuaire statistique 1931-32*. Bucarest, 1933.
- SIMIAND F. — *L'histoire du travail au collège de France*. Paris, 1930.
- SIPÓS A. — *Données de statistique économique de Hongrie 1926-32*. Budapest, 1932.
- SMOULEWITCH B. & WOLKOFF A. — *Accroissement de la population en rapport avec les indices de la natalité et de la mortalité*. Moscou, 1930.
- SMUTNY P. — *Nouvelle organisation des recherches relative à la conjuncture en Tchécoslovaquie*. Praha, 1932.
- SOCIÉTÉ DES NATIONS — *Matériaux pour l'étude des calamités*. Genève, 1933.
- ID. — *Accord signé à Genève le 28/1/1933 instituant une collaboration technique consultative en Roumanie*. Genève, 1933.
- ID. — *Annuaire sanitaire international 1930*. Genève, 1932.
- ID. — *Annuaire statistique de la Société des Nations 1932-33*. Genève, 1933.
- ID. — *Aperçu général du commerce mondial 1931-32*. Genève, 1932.
- ID. — *Idem*. 1932. Genève, 1933.
- ID. — *Application de la Convention internationale pour la simplification des formalités douanières*. Genève, 1933.
- ID. — *Comité financier*. Genève, 1933.
- ID. — *Conférence des pays exportateurs et importateurs de blé*. Genève, 1933.
- ID. — *Conférence International du Travail*. 17^{ème} session. Genève, 1933.
- ID. — *Conférence monétaire et économique. Questions internationales des travaux publics*. Londres, 1933.
- ID. — *Conférence monétaire et économique. Addendum aux rapports approuvés par la Conférence le 27 juillet 1933*. Genève, 1933.
- ID. — *Etablissement des réfugiés Bulgares : 25^{ème}, 26^{ème}, 27^{ème} et 28^{ème} rapport du Commissaire de la Société des Nations en Bulgarie*. Genève, 1933.
- ID. — *Etude sur les conseils économiques dans les différents pays du monde*. Genève, 1932.
- ID. — *La production mondiale et les prix 1925-1932*. Genève, 1933.
- ID. — *La réunion générale d'experts gouvernementaux pour la double imposition et l'évasion fiscale*. Genève, 1928.
- ID. — *Note sur la conférence de la double imposition et de l'évasion fiscale*. Genève, 1928.
- ID. — *Project de nomenclature douanière (2 vol.)*. Genève, 1931.
- ID. — *Projet d'ordre du jour annoté. (Conférence monétaire et économique)*. Genève, 1933.
- ID. — *Rapports approuvés par la Conférence du 27 juillet 1933 et résolutions du Bureau et du Comité exécutif*. Londres, 1933.
- ID. — *Rapports au Conseil sur la Bulgarie*. Genève, 23 mai-10 octobre 1933.
- ID. — *Rapport au Conseil sur la Grèce*. Genève, 1933.
- ID. — *Rapport au Conseil sur les travaux de la 39^{ème}, 40^{ème}, 49^{ème} et 51^{ème} Session du Comité Financier*. Genève, 1933.
- ID. — *Rapport au Conseil sur les travaux de la 4^{ème} session du Comité Fiscal*. Genève, 26 juin 1933.
- ID. — *Rapport du Comité d'Experts de l'examen du projet des fonds de normalisation monétaire*. Genève, 1933.
- ID. — *Rapport sur certaines aspects du problème des matières premières. Tome I*. Genève, 1921.

- SOCIÉTÉ DES NATIONS. — *Recommandations du Comité économique concernat la politique tarifaire et la clause de la Nation la plus favorisée*. Genève, 1933.
- ID. — *Situation économique mondiale 1932-33*, Genève, 1933.
- ID. — *Situation financière de l'Autriche pendant le 3^{ème} trimestre de 1932*. Genève, 1932.
- ID. — *Statistique des maladies à déclaration obligatoire pour l'année 1929*. Genève, 1930.
- ID. — *Idem pour l'année 1931*. Genève, 1930.
- ID. — *Troisième supplément annuel au Catalogue général de 1929*. Genève, 1933.
- STATISTIQUE GÉNÉRALE DE LA FRANCE. — *Annuaire statistique 1931*. Paris, 1932.
- ID. — *Résultats statistiques du recensement général de la population 8/3/1931*. Tome I, 1^{ère} Partie. Paris, 1933.
- ID. — *Statistique des forces motrices en 1926*. Paris, 1931.
- STATISTIQUE GÉNÉRALE DE LA GRÈCE. — *Annuaire statistique 1931*. Athènes.
- TURQUIE. — *Annuaire statistique*. Ankara.
- ABBOTT C. G. — *Twenty-five years' study of solar radiation*. Washington, 1932.
- AITKEN-WISHART-LIDSTON. — *Interpolation without printed differences: Jordan's and Aitken's formulae*. Estr. « *Mathematical Gazette* ». Vol. XVI, n. 217. February. 1932.
- AMERICAN COUNCIL OF LEARNED SOCIETIES. — *Report of the Committee on linguistic and national stocks in the population of the United States*. Washington, 1932.
- ANDERSON WALTER. — *Researches into the theory of the regression*. Lund, 1932.
- BALDUF W. V. — *Our friends the insects*. Washington, 1932.
- BALTIMORA. — *Forty-first annual report of the Commissioner of Labor and Statistics of Maryland 1932*. Baltimore, 1932.
- BANK OF FINLAND. — *Report for 1932*. Helsingfors, 1933.
- BARBEAU MARIUS. — *Totem poles. A recent native art of the northwest coasts of America*. Washington, 1932.
- BARTLETT M. S. and WISHART J. — *The distribution of second order moment statistics in a normal system*. Cambridge, 1932.
- ID. — *The generalised product moment distribution in a normal system*. Estr. « *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* ». Vol. XXIX, part 2^d. Cambridge, 1933.
- BLAKESLEE A. F. and FOX A. L. — *Our different taste worlds*. Washington, 1932.
- BOSANQUET B. — *Rich and poor*. London, 1908.
- ID. — *The strength of the people. Study in social economics*. London, 1903.
- BOWIE W. — *Shaping the Earth*. Washington, 1932.
- BRIGHAM A. P. — *Geographic Influences in American History*. Boston, 1903.
- BRITISH ASSOCIATION. — *Report for the advancement of Science*.
- BRODRICK G. C., CLIFFE LESLIE T. E., DE LAVELEYE E., FAUCHER J., FOWLER W., GOSTICK J., ROGERS J. E. T., SMITH J., WELLS A. — *Cobden Club Essays*. Second series 1871-2, London, 1872.
- BROWNING C. H. — *Chronic enteric carriers and their treatment*. London, 1933.
- CARPENTER TANDY E. — *Secular changes in mortality rates connected with certain organ systems*. Estr. « *Human Biology* ». Vol. 3^o, n. 4, 1931.

- CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY. — *Proceedings*. Vol. XVIII, Part II, n. 38, may, 1932.
- ID. — *Idem*. Vol. XIX, Part I, n. 39, november, 1932.
- CERNUSCHI H. — *The Bimetallic Par.* London, 1887.
- COMMITTEE ON THE COATS OF MEDICAL CARE. — *The purchase of Medical care through fixed periodic payments*, by J. WILLIAMS. Washington, 1932.
- COMMITTEE ON THE GRADING OF NURSING SCHOOL. — *Nurses, production, education, distribution and pay*. New-York, 1930.
- COMMITTEE OF PRIVY COUNCIL FOR MEDICAL RESEARCH. — *Report of the Medical Research Council for the year 1931-32*. London, 1933.
- COMPTON A. H. — *Assault on atoms*. Washington, 1932.
- COOK O. F. — *The best of agriculture to tropical America*. Washington, 1932.
- CORNELL UNIVERSITY. — *Multiple correlation analysis as applied to farm-management research*. By WARREN S. W. Ithaca, 1932.
- ID. — *Relation on daily prices to the marketing of hogs at Chicago*. By H. J. STOVER. Ithaca, 1932.
- ID. — *The physical volume of production in the United States*. By WARREN and PEARSON. Ithaca, 1932.
- ID. — *Wholesale prices at New-York City, 1720 to 1800*. Part 2; by STOKER. Ithaca, 1932.
- ID. — *Wholesale prices in the United States for 135 years, 1797-1932*. Part. I; by PEARSON and WARREN. Ithaca, 1932.
- COSENTINI FRANCESCO. — *The scientific work*. Mexico, 1931.
- CRUMP A. — *Causes of the great fall in prices*. London, 1889.
- CURTIS C. A. — *Statistical contribution to Canadian Economic History*. Vol. I. Toronto, 1931.
- DARWIN CH. — *The Descent of man*. London, 1882.
- ID. — *The origin of species*. London, 1880.
- DE LAVELEYE E. — *Common-place fallacies concerning money*. London, 1882.
- DE TOURVILLE H. — *International bimetallism and the cattle of the standard*. London, 1881.
- ID. — *The Growth of Modern Nations*. London, 1907.
- DOUGLAS A. E. and ANTEVS E. — *Research corporation awards for researches in cronology*. Washington, 1932.
- DUBLIN L. J. — *Longevity of College Athletes*. New-York, 1928.
- DUDLEY BAXTER R. — *The taxation of the United Kingdom*. London, 1869.
- DUNHAM TH. — *Stellar laboratories*. Washington, 1932.
- ECONOMIC ADVISORY COUNCIL. — *Channel Tunnel Committee*. Report. London, 1930.
- EDDINGTON A. S. — *The rotation of the galaxi*. Washington, 1932.
- ELAZARI-VOLCANI. — *The Fellah's farm*. Tel-Aviv, 1930.
- ID. — *The transaction to a dairy industry in Palestine*. Tel-Aviv, 1930.
- FALK O. H. SENSENBRENNER F. J. and SMITH L. R. — *Wisconsin's Tax Policy and its trade with other States and the world*. Milwaukee (Wisc.), 1932.
- FAWCETT H. — *Free trade and protection*. London, 1878.
- FINANCIAL SECRETARY OF THE TREASURY BY COMMAND OF HIS MAJESTY. — *Report of the Committee of Experts on Reparations*. London, 1929.

- FISHER L. — *The relation of employment to the Price Level*.
- FISHER R. A. — *The concepts of inverse probability and fiducial probability. Referring to Unknown Parameters*. Estr. « Proceedings of the Royal Society A. ». Vol 139. 1933.
- FRANKLIN B. — *The autobiography*. Philadelphia, 1895.
- FRASSETTO F. — *The problem of Tuberculosis in coloured races*. Praga, 1932.
- GAFAFER W. M. — *Otolaryngologic Examination of 935 «normal» individuals*. Estr. « The Laryngoscope ». S. Louis, february, 1932.
- ID. — *Quotations the inhabitants of St. Kilda and acute upper respiratory disease*. Estr. « Human Biology ». Vol. III, n. 3. Baltimora, september 1931.
- ID. — *Quotations Joseph Glarwill, a forgotten seventeenthcentury iconoclast*. Estr. « Human Biology ». Vol. IV, n. 1. Baltimora, february 1932.
- ID. — *Transillumination and Roentgenography of the Maxillary Sinuses*. Estr. « Archives of Otolaryngology ». Vol. 14. Chicago, december 1931.
- GEORGES H. B. — *The Relations of Geography and History*. Oxford, 1901.
- GESELL S. — *The Natural Economic Order*. Berlin, 1929.
- GIFFEN R. *Essays in finances*. London, 1880.
- ID. — *Idem*. Second series. London, 1886.
- GRAY F. — *A study of Nephritis and Allied Lesions*. London, 1933.
- GRUENBERG B. C. — *What we know about Heredity and Environment*. Boston, 1930.
- GUINCHARD J. — *Sweden. Historical and Statistical Handbook*. 2 vol. Stockholm, 1914.
- HALCRO WARDIAW H. S. — *Some aspects of the adaptation of living organisms to their environment*. Washington, 1932.
- HALDANE J. B. S. — *Theoretical genetics of autopolyploids*. Estr. « Journal of Genetics ».
- HAMBURGER L. — *Investigation on complete growth functions, the photographic ones in particular*. Amsterdam, 1933.
- ID. — *Recent International Purchasing Power Disparities in the Field of Wholesale Princes*. The Hague, 1929.
- HENCK N. H. — *Coming to Grips with the earthquake problem*. Washington.
- HILDEBRANDT E. H. — *Systems of polynomials connected with Charlies' expansions and the Pearsons' differential and difference equations*. Michigan, 1931.
- HILL A. B. — *International Migration and its effects upon the Death-Rates with special reference to the Country of Essex*. London, 1925.
- HODGSON A. E. — *The earth beneath in the light of Modern Sysmology*. Washington, 1932.
- HUNTINGTON E. — *The pulse of Asia*. London, 1907.
- HUTTON D. GRAHAM. — *Nations and the Economic Crisis*. London.
- INGHAM A. E. — *An integral which occurs in statistics*. Estr. « Proceedings of the Cambridge Philosophical Society ». Vol. XXIX, part 2. Cambridge, 1933.
- INTERNATIONAL FEDERATION OF MASTER COTTON SPINNERS' AND MANUFACTURERS' ASSOCIATION. — *International Cotton Statistics*. Manchester, 1929.
- IVES HERBERT E. — *Two-way television*. Washington, 1932.
- JESPERSEN OTTO. — *A new science interlinguistics*. Cambridge.
- JOHNSON S. — *A voyage to Abissinia*. London, 1893.
- JOHNSTON E. S. — *Growing plants without soil*. Washington, 1932.

- JORDAN C. — *Approximation and graduation according to the principle of least squares by orthogonal polynomials*. Estr. « The Annals of Mathematical Statistics ». Michigan, november 1932.
- KUMAR SARKAR B. — *The pursuit of scientific research in Modern Bengal*. Calcutta.
- ID. — *Studies in applied economics*, Vol. I. Calcutta, 1932.
- KURTZ E. B. — *Life characteristics of physical property*. Jawa, 1931.
- LEAGUE OF NATIONS. — *Financial position of Austria in the first quarter 1933*. Genève, 30/6/1933.
- ID. — *Idem in the second quarter 1933*. Genève, 30/9/1933.
- ID. — *Idem in the fourth quarter 1933*. Genève, 1933.
- ID. — *Financial position of Hungary in the third quarter 1932*. Genève, 1932.
- ID. — *Idem in the fourth quarter 1932*. Genève, 1932.
- ID. — *Idem in the first quarter 1933*. Genève, 1933.
- ID. — *Idem in the second quarter 1933*. Genève, 1933.
- LEHFELDT R. A. — *Economics in the Light of War*. London, 1916.
- LINDERS F. J. — *Nordic Statistical Journal*. Vol. IV, Parts 1-2, 1932.
- LOFTUS P. C. — *Main Cause of Unemployment*.
- LOTKA A. J. — *The structure of a growing population*. Estr. « Human Biology ». Vol. 3, n. 4. Baltimore. december 1931.
- MCEVEN GEORGE FRANCIS. — *Methods of Estimating the significance of differences in our probabilities of fluctuations due to random sampling*. Berkeley (Cal.) 1929.
- MEDICAL RESEARCH COUNCIL. — *Apparatus for the rapide study of ultra-violet absorption spectra*. By J. St. L. PHILPOT. London, 1933.
- ID. — *Idem*. By E. H. J. SCHUSTER. London, 1933.
- ID. — *Colour vision requirements in the Royal Navy*. London, 1933.
- ID. — *Epidemiological study of scarlet fever in England and Wales since 1900*. By H. M. WOODS. London, 1933.
- ID. — *Facial growth in children*. By C. SMITH and M. YOUNG. London, 1932.
- ID. — *Individual differences in normal colour vision*. By W. O. D. PIERCE. London, 1933.
- ID. — *Medical uses of radium*. London, 1932.
- ID. — *Medical uses of radium. Summary from research centres for 1932*. London, 1933.
- ID. — *Reports on biological standards*. By GADDUM. London, 1933.
- ID. — *Studies in the localization of Sound*. — A) The localization in the Median Plane. B) Some factors in Auditory localization. By SHAXBY, GAGE, JAMES and MASSEY. London, 1932.
- ID. — *The eradication of bovine tuberculosis*. By L. JORDAN. London, 1933.
- ID. — *The measurement of visual acuity*. By R. J. LYTGOE. London, 1932.
- ID. — *Third report of the miners' Nystagmus Committee*. London, 1932.
- ID. — *Tuberculous bacillaemia*. By G. S. Wilson. London, 1933.
- ID. — *Tuberculous disease in children*. By J. BLACKLOCK. London, 1932.
- ID. — *Vitamin content of Australian, New Zeland and English butters*. By CRAWFORD, PERRY and ZILVA. London, 1932.
- MICHELL H. — *Statistical contributions to Canadian economic History*. Toronto, 1931.

- MILL, ESQ. J. — *Elements of Political Economy*. London, 1824.
- MULTON F. R. — *Albert Abraham Michelson*. Washington, 1932.
- NATIONAL BUREAU OF ECONOMIC RESEARCH. — *Report of the Directors of research for the year 1932*. New-York, 1933.
- NICHOLSON N. A. — *The science of exchanges*. London, 1873.
- NIXON J. W. — *Index-numbers of wages : a survey*. Estr. « *Revue Internationale de Statistique* ». N. 1, 1933.
- NORRIS R. H. — *The composition of the sun*. Washington, 1932.
- PALMER C. E. — *The relationship of erect body lenght to supine body lenght*. Estr. « *Human Biology* ». Vol. 4, n. 2. Baltimore, may 1932.
- PEARSON K. — *Darwinism, Medical Progress and Eugenics*. London.
- PLATENIUS H. — *Carbohydrate and nitrogen metabolism in the celery plant as related to premature seeding*. New-York, 1931.
- POWER E. — *The industrial revolution 1750-1850*. Oxford.
- PROCEEDINGS OF THE SIXTH CONGRES OF GENETICS. — Vol. I. Brooklyn N. Y., 1932.
- REPORT OF THE COMMISSION ON THE PALESTINE DISTURBANCES OF AUGUST 1929. London, 1930.
- RIPLEY W. Z. — *The Races of Europe*. London, 1900.
- SCHULTZ H. — *Frisch on the Measurement of Utility*. 1933.
- ID. — *Marginal productivity and the Lausanne School*. Estr. « *Economica* ». August, 1932.
- ID. — *The standard error of the coefficient of elasticity of demand*. Estr. « *Journal of the American Statistical Association* ». March 1933.
- SHENHART W. A. — *The rôle of statistical method in economic standardization*. Estr. of the « *Lecture presented at the University of London* ». May, 1932.
- SHENTON H. N. — *Can sociale engineers improve the international language situation ?* Cambridge.
- SIDGWICK H. — *Outlines of the History of Ethics*. London, 1902.
- SINHA HARISH CHANDRA and SAILENDRA M. A. — *Indian prices during the depression*. Estr. « *Sarkhya, the Indian Journal of Statistics* ». Vol. I, part I, june 1933.
- SIPOS A. — *Practical Application of Jorsan's Method for Trend Measurement*. Budapest, 1930.
- SMITHSONIAN INSTITUTION. — *Publications n. 3078 and n. 3106*. Washington.
- SOPIN EDWARD. — *The function of an international auxiliary language*. Cambridge.
- SPENG H. — *The study of sociology*. London, 1882.
- STATE RUSSIAN GEOGRAPHICAL SOCIETY. — *The centrographical Laboratory of the name of D. I. Mendeleeff*. Leningrado, 1933.
- STATICAL DEPARTMENT OF FINLAND. — *Bank of Finland* 1931. Helsingfors, 1932.
- STETSON HARLAN T. — *Sun spots and ratio reception*. Waslington, 1932.
- STEWART M. A. and STEWART B. M. — *Statistical procedure of public employment office*. New-York, 1933.
- STREIGHTOFF F. H. — *The distribution of Incomes in the United States*. London, 1912.
- STOCKHOLM ECONOMIC STUDIES. — *Wages in Sweden 1860-1930 in two parts*. London.

- TAYLOR K. W. — *Statistical Contributions to Canadian Economic History*. Vol. II. Toronto, 1931.
- THE STATE SCIENTIFIC INSTITUTE OF PUBLIC NUTRITION. *Problems of nutrition*. Moscow, 1932.
- THOROLD ROGERS JAMES E. — *The industrial and commercial History of England*. London, 1892.
- TOWNE DAWSON. — *Economic and statistical studies 1840-1890*. London.
- UNITED STATES BUREAU OF LABOR STATISTICS. — 7th Annual meeting. Philadelphia, 24-27/9/1919; 8th Annual meeting. Toronto, 9-12/9/1929. Washington, 1931.
- ID. — *Decisions of courts and opinions affecting labor 1929-1930*. Washington, 1931.
- ID. — *Labor conditions in the territory of Hawai 1929-1930*. Washington, 1931.
- ID. — *Labor legislation of Paraguay*. Washington, 1931.
- ID. — *Labor legislation of Venezuela*. Washington, 1931.
- ID. — *Proceedings of the 17th Annual meeting of the International Association of industrial accident boards and commissions*. Washington, 1931.
- ID. — *Idem 18th*. Washington, 1931.
- ID. — *Social and economic, character of unemployment in Philadelphia*. Washington, 1930.
- ID. — *Unemployment-benefit plans in the United States and Unemployment insurance in foreign countries*. Washington, 1931.
- ID. — *Union scales of wages and hours of labor*. May 15, 1930. Washington, 1931.
- ID. — *Wages and hours of labor in air transportation*, 1931. Washington, 1933.
- ID. — *Wages and hours of labor in the boot and shoe industry 1910 to 1932*. Washington, 1933.
- ID. — *Wages and hours of labor in Cane-sugar refining industry*, 1930. Washington, 1931.
- ID. — *Wages and hours of labor in cotton-goods manufacturing 1910 to 1930*. Washington, 1931.
- ID. — *Wages and hours of labor in Foundries and Machine shops*, 1931. Washington, 1933.
- ID. — *Wages and hours of labor gasoline filling stations and motor-vehicle repair garages : 1931*. Washington, 1933.
- ID. — *Wages and hours in rayon and other syntetic yarn manufacturing*, 1930. Washington, 1932.
- ID. — *Wages and hours of labor in the slaughtering and meat-packing industry : 1929*. Washington, 1931.
- ID. — *Idem : 1931*. Washington, 1933.
- ID. — *Wages and hours of labor in the cigarette manufacturing industry : 1930*. Washington, 1931.
- ID. — *Wages and hours of labor in the furniture industry : 1910 to 1929*. Washington, 1931.
- ID. — *Wages and hours of labor in the portland cement industry*, 1930.
- ID. — *Wages and hours of labor in woolen and worsted goods manufacturing : 1910 to 1930*. Washington, 1931.
- ID. — *Wholesale price 1931*. Washington, 1933.

- UNITED STATES DEPARTMENT OF COMMERCE. — *Agriculture. Summary for the United States 1929 and 1930.* Washington.
- ID. — *Center of population and median lines and centers of aerea, agriculture, manufactures and cotton.* Washington, 1933.
- ID. — *Fifteenth Census of the United States : 1930. Agriculture.* Vol. III, part I. Washington, 1932.
- UNITED STATES DEPARTMENT OF LABOR. — *Park recreation areas in the United States.* 1930. Washington, 1932.
- ID. — *Union scales of wages and of labor.* Washington, 1931.
- ID. — *Wages and Hours of Labor in the Dyeing and Finishing of Textiles 1930.* Washington, 1931.
- ID. — *Wages and Hours of Labor in the lumber industry in the U. S. 1930.* Washington, 1931.
- ID. — *Wholesale prices 1930.* Washington, 1931.
- VERMONT UNIVERSITY. — *Second Annual report of the Eugenics Survey of Vermont.* Vermont, march, 1933.
- WELLS H. G. — *Mankind in the Making.* London, 1906.
- WHELPTON P. K. — *The extent character and future of the New-Land ward movement.* Estr. « Journal of Farm Economics ». Vol. XV, n. 1. Miami, 1933.
- WILCOX W. F. — *Introduction to the vital statistics of the United States.* Washington, 1933.
- WILLIAMS P. — *The purchase of Medical care Through fixed periodic payments.* Washington.
- WINFREY R. — *Life characteristics of physical property.* Iowa, 1931.
- WINGATE TODD T. — *Adolescent Skill-Hunger.* 1932.
- ID. — *An anthropologist's study of negro life.* Cleveland, 1930.
- ID. — *Compensations in life.* Cleveland, 1931.
- ID. — *Comings and goings.* New-York, 1931.
- ID. — *Family Building.* Cleveland, 1929.
- ID. — *Frontier life.* Cleveland, 1930.
- ID. — *Growth and Developpement.* Ohio, 1932.
- ID. — *Growth. The Gipsy.* Cleveland, 1929.
- ID. — *Life's impact and youth's adjustment.* Cleveland, 1931.
- ID. — *Measuring the growth of children.* Ohio, 1931.
- ID. — *Meeting the Hazards of life.* Akron, 1931.
- ID. — *Practical Pace Improvement.* Boston, 1930.
- ID. — *Race Betterment.* Ohio, 1929.
- ID. — *Safeguarding Humanity.* 1930.
- ID. — *The Herald's staff.* Cleveland, 1929.
- ID. — *The natural history of Human growth.* Cleveland, 1931.
- ID. — *The registration of life's Handicaps.* Cleveland, 1931.
- WISHART JOHN. — *A comparison of the semi-invariants of the distributions of moment and semi-invariant estimates in samples from an infinite population.* Estr. « Biometrika », vol. XXV part I & II ». London, 1933.
- ID. — *A note on the distribution of the correlation ratio.* Estr. « Biometrika ». Vol. XXIV, part III & IV. London, november 1933.
- ID. — *The theory of orthogonal polynomial fitting.* Estr. « The Journal of the Royal Statistical Society ». Vol. XCVI, Part III, 1933.

- WOOD CASEY A. — *Some wild falwers from swisse meadows and mountain.* Washington, 1932.
- YENCHING UNIVERSITY. — *General announcement of the Department od Sociology and Social work 1932-35.* Peiping, 1932.
- YOUNG G. — *The pendulum of Progress.* London, 1931.
- YUAN I. CHIN. — *The influence of heredity upon the duration of life in man based on a Chinese Genealogy from 1365 to 1914.* Estr. « Human Biology ». Vol. 4, n. 1. Baltimora, february 1932.
- BAYERISCHES STATISTISCHE LANDESAMT. — *Jubiläumsschrift.* Monaco.
- BERNSTEIN F. — *Fortgesetzte Untersuchungen aus der Theorie der Blutgruppen.* Estr. « Zeitschrift für induktive Abstammungs- und Vererbungslehre ». Bd. LVI, H. 2, 1930.
- ID. — *Ueber die Erblichkeit der Blutgruppen.* Estr. « Zeitschrift für induktive Abstammungs- und Vererbungslehre ».
- ID. — *Ueber die Ermittlung und Prüfung von Gen-Hypothesen aus Vererbungsbeobachtungen am Menschen und über die Unzulässigkeit der Weinberg'schen Geschwistermethode als Korrektur der Auslesewirkung.* Estr. « Archiv für Rassen und Gesellschaftsbiologie ». Bd. 22, H. 3, München. 1929.
- ID. — *Ueber die Unzulässigkeit der Weinberg'schen Geschwistermethode.* Estr. « Archiv für Rassen und Gesellschaftsbiologie ». Bd. 23, H. 2/3. München, 1930.
- ID. — *Ueber den anthropologischen Wert der Blutgruppen nach Mendes-Corrêa.* Estr. « Anthropologischer Anzeiger ». Jahrg. VI, H. 4, 1930.
- ID. — *Zur Grundlegung der Chromosomentheorie der Vererbung beim Menschen mit besonderer Berücksichtigung der Blutgruppen.* Estr. « Zeitschrift für induktive Abstammungs- und Vererbungslehre ». Bd. LVII, H. 2/3, 1931.
- BERNSTEIN F. und SCHLÄPER P. — *Ueber die Tonlage der menschlichen Singstimme.*
- BUDAPEST. — *Statistisch-Administratives Jahrbuch der Haupt- und Residenzstadt Budapest.* Budapest, 1930.
- BUNDESAMT FÜR STATISTIK. — *Statistisches Handbuch für die Republik Oesterreich.* Wien, 1932.
- DAHLBERG G. — *Eine statistische Untersuchung über die Vererbung Taubstummheit.* Berlin, 1930.
- ID. — *Korrelationserscheinungen bei nicht erwachsenen Individuen und eine Theorie über den Wachstumsmechanismus im Hinblick auf intermittierende Umweltfaktoren.* Estr. « Zeitschrift für Morphologie und Anthropologie ». Bd. XXIX, H. 2 und 3, 1931.
- ID. — *Ueber Bevölkerungsvermehrung.* Estr. « Allgemeines Statistisches Archiv ». Bd. 21, Jena, 1931.
- FISCHER E. — *Die gegenseitige Stellung der Menschenrassen auf Grund der Mendelschen Merkmale.* Roma, 1932.
- GUMBEL E. J. — *Die gaussche Verteilung der Gestorbenen.*
- HAYEK F. A. — *Geldtheorie und Konjunkturtheorie.*
- HAYMANN F. — *Ein Beitrag zur Frage der Vererblichkeit der bedingten Kaufobligation und der Gültigkeit des Kaufs zum angemessenen Preis.* Palermo, 1932.

- HERSCH L. — *Der Rückgang der Geburtenziffer in Deutschland und seine mathematische Formulierung*.
- INAMA-STERNEGG K. Th. — *Deutsche Wirtschaftsgeschichte*. 2 vol. Leipzig, 1891.
- KOLLER S. und SOMMER M. — *Zur Kritik der von S. Wellisch angewandten mathematischen Methoden in der Blutgruppenforschung*. Estr. «*Zeitschrift für Rassenphysiologie*». Bd. 3, H. 1, München, 1930.
- KUGLER E. — *Körperproportionen und Kopfform bei Neugeborenen*. Zürich, 1932.
- MUCHERMANN H. — *Differenzierte Fortpflanzung*. Estr. «*Archiv für Rassen und Gesellschaftsbiologie*». Bd. XXIV. München, 1930.
- NEUMANN-SPALLART. — *Uebersichten der Weltwirtschaft*. 5 vol. Berlino.
- NÜRNBERG. — *Nürnberger Hochschulkalender*. 1933.
- OBERSCHALL A. — *Die Sprachgebiete der Tschechoslovakei*. 1932.
- PELLER SIGISMUND. — *Ueber die weibliche Selbstmordhandlung*. Estr. «*Archiv für Frauenkunde und Konstitutionsforschung*». Bd. 18, H. 1/2. Leipzig, 1932.
- ID. — *Zur Statistik der Selbstmordhandlung*. Jena, 1932.
- PREUSSISCHEN STATISTISCHEN LANDESAMT. — *Statistisches Jahrbuch für den Freistaat Preussen*. Berlin, 1932.
- SAITZEW M. — *Mathematisch-statistischen Nachweis der langen Welle der Arbeitslosigkeit in der Nachkriegszeit*.
- SALLER K. — *Untersuchungen in Fördernkassen (Sprachklassen) und Hilfschulden der Stadt Hannover*. Estr. «*Zeitschrift für Kinderforschung*». Bd. 2. Berlin, 1933.
- SCHENKER O. — *Direkter Weg zur Ermittlung von Relationen zur Trendbestimmung*. Estr. «*Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft*». 69 Jahrg. H. 1. 1933.
- STACKELBERG H. — *Grundlagen einer reinen Kostentheorie*. Wien, 1932.
- ID. — *Zwei kritische Bemerkungen zur Preistheorie Gustav Cassels*. Köln.
- STATISTISCHES AMT DER STADT BERLIN. — *Kleines Berliner Taschenbuch*. 1932.
- STATISTISCHES JAHRBUCH DER STADT BERLIN. 1932.
- STATISTISCHES JAHRBUCH FÜR DAS DEUTSCHE REICH. Berlin, 1932.
- STATISTISCHES TASCHENBUCH FÜR WIEN 1931. Wien, 1932.
- SZPIDBAUM H. — *Ueber das sogenannte Typenfrequenzgesetz*. Estr. «*Verhandlungen der Gesellschaft für Physische Anthropologie*». 1932.
- WAGENFÜHR H. — *Kartellpreise und Tariflöhne im Konjunkturverlauf*. Estr. «*Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*». Jena, 1933.
- ID. — *Statistik der Kartelle*. Estr. «*Allgemeines Statistisches Archiv*». Bd. 22. Jena, 1932.
- WEINBERG W. — *Das Württembergische Kataster der Geisteskranken als Forschungsquelle der Wissenschaft*. Estr. «*Archiv für Rassen und Gesellschaftsbiologie*». München, 1932.
- WIESE L. — *System der Allgemeinen Soziologie*. Leipzig, 1933.
- WIRTSCHAFT UND STATISTIK. — *Die Finanzlage der Gemeinden und Gemeindeverbände*. Berlin, 1932.
- ID. — *Industrielle Produktion. Sammlung Produktionsstatistischen Ergebnisse bis zum Jahre 1932*.

- WITTE B. — *Eisenbahn und Staat. Ein Vergleich der europäischen und nord-amerikanischen Eisenbahnorganisationen in ihrem Verhältnis zum Staat.* Jena, 1932.
- WYLER J. — *Mathematisch-statistischer Nachweis der langen Welle der Arbeitslosigkeit in der Nachkriegszeit.*
- ANTROPOLOGISKE KOMITÉ. — *Meddeleser om Danmarks Antropologi.*
- BAHIA. — *Noticia Historica e Informacoes estatisticas do Estado de Bahia.* 1932.
- BAJOCO J. PEDRO. — *El Instituto de economia bancaria y su funcion docente.* Estr. « *Rivista de Ciencias economicas* ». Buenos Ayres, marzo-aprile, 1933.
- BANCO DE ESPAÑA : SERVICIO DE ESTUDIOS. — *Ritmo de la crisis economica española en relacion con la mundial.* Madrid, 1933.
- BACA-GIACCHETTI E. A. — *Cambios internacionales en el año 1931. La desvalorizacion del peso argentino, sus causas y efectos.* Estr. « *Revista Economica Argentina* ». Buenos Ayres, noviembre-diciembre 1932.
- BRAZIL. — *Anuario demografico 1929.* S. Paolo, 1932.
- BUREAU VOOR DE STATISTIEK. — *Jaarcijfers voor Nederland.* S-Gravenhage, 1933.
- DARSZYNSKA GOLINSKA Z. — *Podstawy teoretyczne polityki społecznej w zarysie.*
- DE ANDREADE NAVARRO. — *Cultura de café à sombra.*
- DIEULEFAIT CARLOS. — *La determinación de la tendencia secular en las series economicas.* Rosario, 1932.
- DEPARTAMENTO NACIONAL DE ESTADISTICA-BRAZIL. — *Registo Civil 1931.*
- DEPARTAMENTO DE LA ESTADISTICA NACIONAL - MEXICO. — *Nomenclaturas internacionales de las enfermedades y de las causas de defuncion.* Mexico, 1931.
- DEPARTAMENTO NACIONAL DE SAUDE PUBLICA - BRAZIL. — *Anuario de Estadistica Demographo-Sanitario.* Rio de Janeiro, 1932.
- DIRECCION GENERALE DE ESTADISTICA DE LA PROVINCIA DE SANTA FÉ. — *Movimiento Bancario.* Santa FÉ, 1932.
- DIRECCION GENERALE DEL INSTITUTO CATASTAL Y DE ESTADISTICA. — *Pasajeros por mar con el exterior.* Años 1926, 1927, 1928 y 1929. Madrid, 1932.
- DIRECCION GENERALE DE SANIDAD. — *Resumen de natalidad y mortalidad de España en el año 1932.* Madrid, 1933.
- ID. — *Idem en el año 1931.* Madrid, 1932.
- HALECKI M. — *Proba teorji konjunktury.* Warszawa, 1933.
- HAMBURGER L. — *De Veranderlijkheid van Prijzen.* 'S-Gravenhage, 1929.
- ID. — *Economische grondslagen en richtlijnen vanuit een natuurwetenschappelijk standpunt beschauwd.*
- ID. — *Kantteekeningen « Physica ».* 'S-Gravenhage.
- ID. — *Opmerkingen over variaties in Het Eletrisch Godrag van Verschillende Stoffen.* « *Physica*, n. 1 », 1932.
- HUEVO ALBERTO. — *Discusión del proyecto de ley sobre conversión de cédulas hipotecarias.* (Discurso en el Senado 30 de septiembre 1933). Buenos Ayres.
- KOROSK VIKTOR. — *Raub- und Kaufche im Hethitischen Recht.* Palermo, 1932.
- MINISTERIO DE TRABAJO Y PREVISION SOCIAL. — *Estatistica de los accidentes del Trabajo ocurridos en los años 1929 y 1930.* Madrid, 1933.
- NORGES OFFISIELLE STATISTIKK. — *Folketellingene i Norge 1 desember 1930.* Oslo, 1932.

- NORGES OFFISIELLE STATISTIKK. — *Norges Brandkasse*. Oslo, 1933.
- ID. — *Norges, civile, geistige, rettslige og militære inndeling 1 juli 1932*. Oslo, 1932.
- ID. — *Norges Fiskerier*. Oslo, 1933.
- PRESIDENCIA DEL CONSEJO DE MINISTROS. — *Movimiento natural de la población de España*. Madrid, 1932.
- ROSSET EDWARD. — *Alkoholizm w miastach polskich*. Łódź, 1927.
- ID. — *Alkoholizm w Łodzi w świetle badań statystycznych*. Łódź, 1925.
- ID. — *Łódź Miasto Pracy*. Łódź, 1929.
- ID. — *Ludność Powiatu Łódzkiego Studium Statystyczne*. Łódź, 1928.
- ID. — *Łódź w latach 1860-70 Zarys historyczno-statystyczny*. Łódź, 1928.
- ID. — *Oblicze Polityczne Ludności Miasta Łodzi*. Łódź, 1927.
- ID. — *Proletariat Łódzki w świetle badań demograficznych*. Warszawa, 1930.
- ID. — *Prostytucja i Choroby Weneryczne w Łodzi*. Łódź, 1931.
- ID. — *Samozad a Problem Mleczny*. Łódź, 1928.
- ID. — *Samorząd Łódzki w walce z Głodem Mieszkniowym*. Łódź, 1930.
- ID. — *Zagardnienia gospodarki samorządowej Miasta Łodzi*. Łódź, 1926.
- SJOGREN TORSTEN. — *Klinische und venebrungsmedizinische untersuchungen über oligphrenie in einer nordschwedischen banempopulation*. Copenhagen, 1932.
- SZPIDBAUM H. — *Samarytanie studjum antropobiologiczne*. Warszawa, 1927.
- VALK W. L. — *Werkverschaffing is magelijk en drigend noodzakelijk*. Den Haag, 1932.
- VILLALPANDO S. — *La estadística en la dirección de pensiones civiles de retiro, Mexico*, 1932.
- ID. — *Síntesis estadística*. Durango, 1926.

PROF. CORRADO GINI, *Direttore responsabile*.

Roma — «L'Universale» Tipografia Poliglotta.